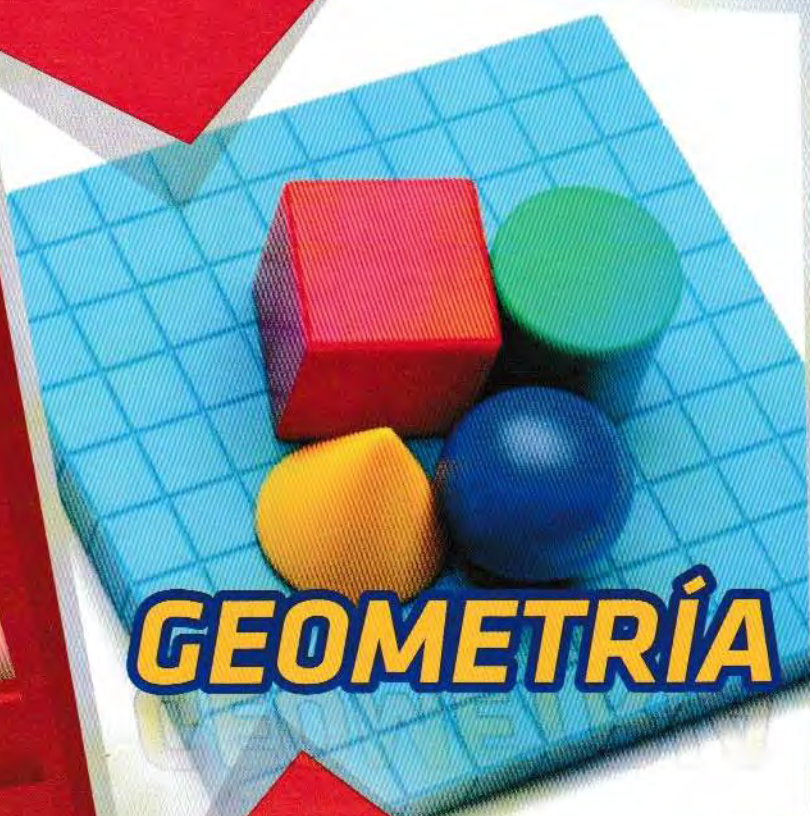


Teoría y Práctica

12

Esfera - Teorema de Pappus

A photograph of a blue grid-patterned surface, possibly a book cover or a mat, featuring four 3D geometric shapes: a red cube, a green cylinder, a yellow sphere, and a blue sphere. The shapes are arranged in a cluster. The entire scene is framed by a large red geometric shape that resembles a stylized envelope or a book cover.

GEOMETRÍA

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Alex Noa Lume

FONDO EDITORIAL
ARODO
Siempre competitivo

Teoría y Práctica

12

Esfera - Teorema de Pappus



GEOMETRÍA

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Alex Noa Lume

FONDO EDITORIAL
ARODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

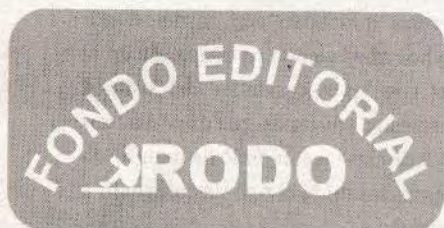
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2016, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

ESFERA - TEOREMA DE PAPPUS



GEOMETRÍA - TEMA SELECTO 12, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Abril 2016 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2016-04941

EQUIPO PEDAGÓGICO

Alex Noa Lume

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

Claudia Llosa La Serna

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **GRAFIC PLUS S. A. C.**

Jr. Chinchá N° 434 A. H. VIZONA LIMA - Lima 11

ESFERA, SUPERFICIE ESFÉRICA Y SUS PARTES**SUPERFICIE ESFÉRICA Y ESFERA**

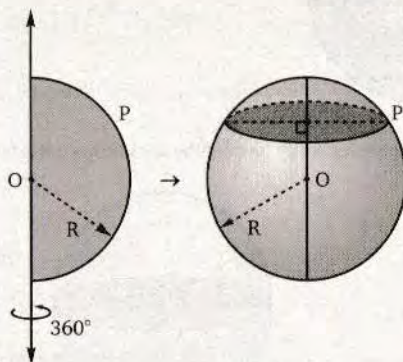
Se llama **superficie esférica** la engendrada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

En este movimiento todo punto de la semicircunferencia describe una circunferencia, cuyo centro está en el eje de rotación y cuyo plano que la contiene, le es perpendicular.

Como cualquier punto P de la superficie esférica pertenece a la semicircunferencia que la engendra, y el centro de ésta no se mueve en el giro, concluimos que: todos los puntos de la superficie equidistan de un punto fijo, llamado centro.

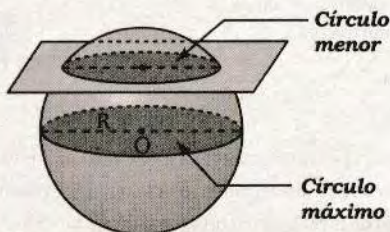
A la distancia fija entre cualquier punto de la superficie esférica y su centro se le llama radio.

Se llama **esfera**, la engendrada por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

**TEOREMAS**

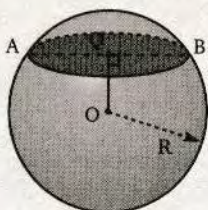
- 1) Toda sección plana de una esfera es un círculo.

Si el plano secante no pasa por el centro se obtendrá un círculo menor y si pasa por el centro un círculo máximo.



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 12

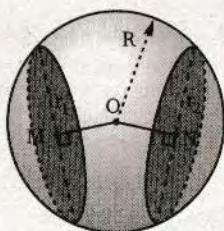
- 2) El segmento que une el centro de una esfera y el de un círculo menor de la esfera, es perpendicular al plano del círculo.



Si O y Q son centros:

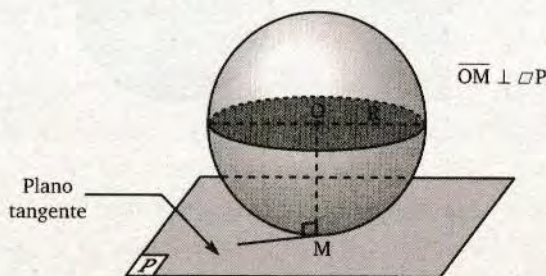
$$\rightarrow \overline{OQ} \perp \overline{AB}$$

- 3) Planos equidistantes del centro de una esfera la cortan en círculos congruentes.



$$\text{Si } OM = ON \leftrightarrow r_1 = r_2$$

- 4) Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.



$$\overline{OM} \perp \square P$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA ($S_{(S.E.)}$)

El área de una superficie esférica es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.

$$S_{(S.E.)} = 4\pi R^2$$

TEOREMA

El área de la superficie generada por un segmento ($\overline{AB}$), al girar una revolución, tomando como eje de giro $\overline{L}$, es igual a la longitud de la circunferencia cuyo radio es el segmento mediatriz de AB limitado por $\overline{L}$, multiplicado por la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{L}$.

Datos:

- Segmento mediatriz de $\overline{AB}$ limitado por $\overline{L}$: $MN = d$
- Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{L}$: $CD = h$.

Por demostrar:

- $S_{G(\overline{AB})}$: área de la superficie generada por $\overline{AB}$.

$$S_{G(\overline{AB})} = 2\pi d \cdot h$$

- En el trapecio ABCD : $m = \frac{R+r}{2}$; $\text{sen } \alpha = \frac{h}{g}$

- En el triángulo MEN: $\text{sen } \alpha = \frac{m}{d}$

Igualando se tiene: $\frac{h}{g} = \frac{m}{d}$

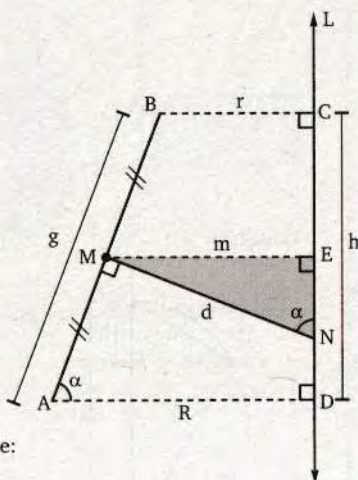
$$\rightarrow hd = mg = \left(\frac{R+r}{2}\right)g \dots\dots(I)$$

- Al girar el trapecio ABCD genera un tronco de cono donde:

$$S_{\text{LATERAL TRONCO}} = \pi(R+r)g$$

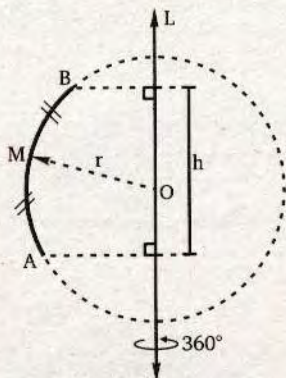
$$S_{G(\overline{AB})} = \pi(R+r)g \dots\dots(II)$$

De (I) en (II): $\therefore S_{G(\overline{AB})} = 2\pi d \cdot h$



OBSERVACIÓN

a)

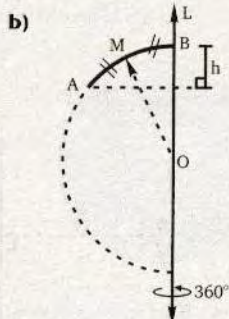


Si O es el centro del arco $\widehat{AB}$, tenemos que:

- $S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi d \cdot h$ donde: $d = r$

$$S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi r \cdot h$$

$$\therefore S_{\text{(zona esférica)}} = 2\pi r h$$



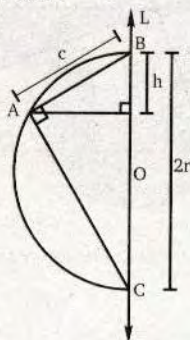
Si O es el centro del arco $\widehat{AB}$, tenemos que:

- $S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi d \cdot h$ donde: $d = r$

$$S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi r \cdot h$$

$$\therefore S_{(\text{casquete esférico})} = 2\pi r h$$

También:



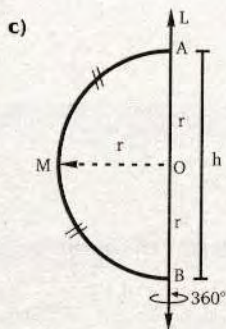
En el $\triangle ABC$: por relaciones métricas se cumple:

$$c^2 = 2r \cdot h$$

Finalmente:

$$\therefore S_{(\text{casquete esférico})} = \pi c^2$$

donde: "c" es la longitud de la cuerda correspondiente al arco generador AB.



Si O es el centro de la semicircunferencia AB.

- $S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi d \cdot h$ donde: $d = r$ y $h = 2r$

$$S_{G(\widehat{AB})} = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

$$\therefore S_{(\text{superficie esférica})} = 4\pi r^2$$

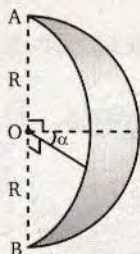
VOLUMEN DE LA ESFERA (V_E)

El volumen de una esfera es igual a un tercio del área de la superficie esférica multiplicada por el radio.

$$V_E = \frac{4}{3} \pi R^3$$

HUSO ESFÉRICO

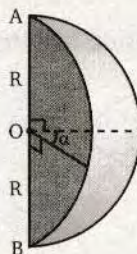
Se llama huso esférico a la superficie generada por una semicircunferencia al girar un cierto ángulo (menor que 360) alrededor de su diámetro.



$$S_{\text{HUSO}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

CUÑA ESFÉRICA

Es el sólido engendrado por un semicírculo que gira un cierto ángulo (menor que 360) alrededor de su diámetro.



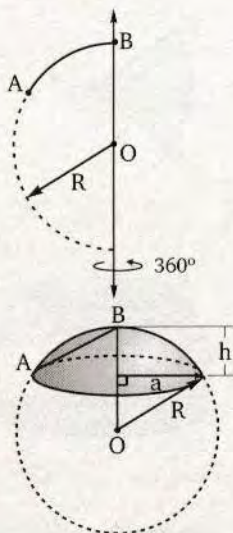
$$V_{\text{CUÑA}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

ZONA ESFÉRICA

Es la superficie generada por un arco de circunferencia que gira alrededor de un diámetro exterior.

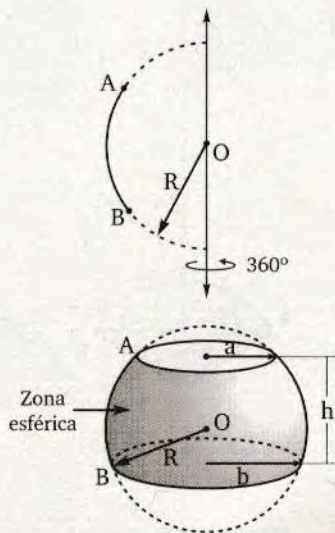
Si uno de los extremos del arco generador coincide con uno de los extremos del diámetro, entonces la superficie generada se llamará zona esférica de una base o casquete esférico. Si ninguno de los extremos del arco generador coincide con los extremos del diámetro entonces la superficie generada se llamará zona esférica de dos bases.

ZONA ESFÉRICA DE UNA BASE O CASQUETE ESFÉRICO



$$S_{\text{CASQUETE}} = 2\pi Rh = \pi AB^2$$

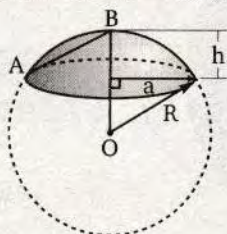
ZONA ESFÉRICA DE DOS BASES



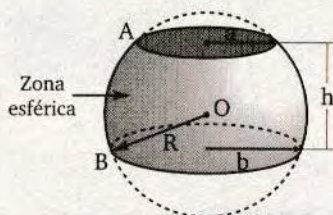
$$S_{\text{ZONA}} = 2\pi Rh$$

SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porción de esfera comprendida entre una zona esférica y sus bases. La distancia entre las bases se llama altura del segmento esférico.

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

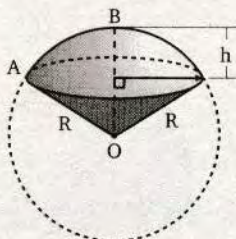
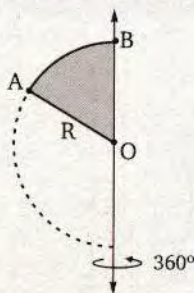
$$V_{\text{SEG.ESF}} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h a^2$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

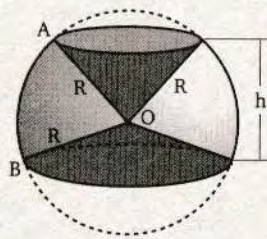
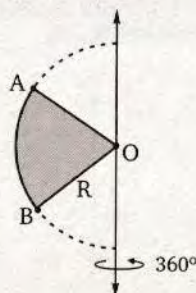
$$V_{\text{SEG.ESF}} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h (a^2 + b^2)$$

SECTOR ESFÉRICO

Se llama sector esférico al sólido engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de un diámetro exterior.



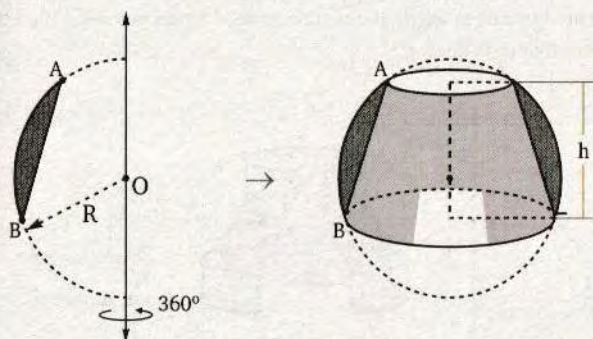
$$V_{\text{SECTOR.ESF}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$



$$V_{\text{SECTOR.ESF}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

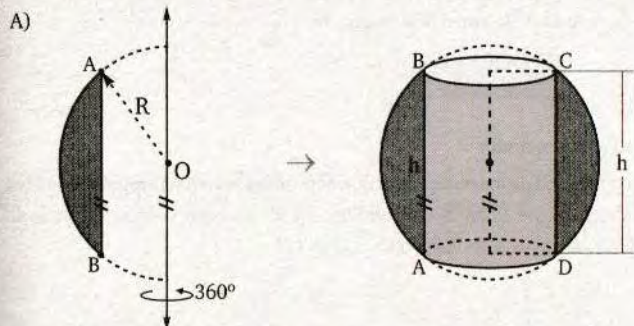
ANILLO ESFÉRICO

Se llama anillo esférico al sólido engendrado por un segmento circular al girar alrededor de un diámetro exterior.

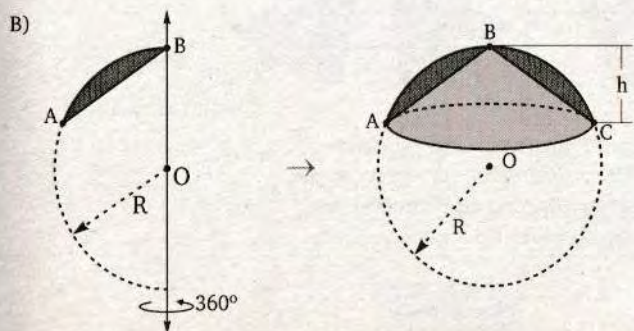


$$V_{\text{ANILLO.ESF}} = \frac{1}{6} \pi AB^2 h$$

CASO PARTICULAR



$$V_{\text{ANILLO.ESF}} = \frac{1}{6} \pi h^3$$

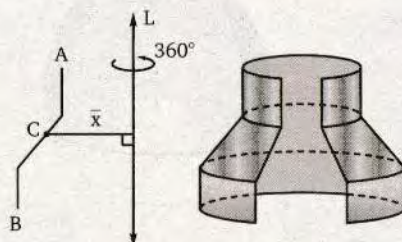


$$V_{\text{ANILLO.ESF}} = \frac{\pi}{6} AB^2 \cdot h$$

TEOREMA DE PAPPUS - GOULDING

PRIMER CASO Para superficies generadas.

Si una línea coplanar a un eje de giro y de preferencia no secante, gira una revolución, se genera una superficie cuya área es igual al producto de la longitud o perímetro de la figura por la longitud de la circunferencia que describe el centroide de la línea.

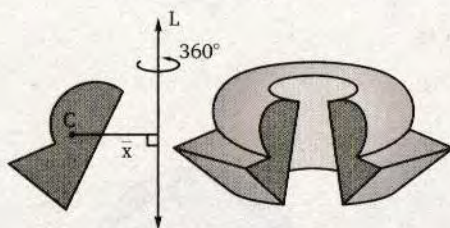


- ℓ : Longitud de la línea que gira
 C : Centroide de la línea que gira
 $\bar{x}$: Distancia del centroide C hacia $\overline{L}$
 A_{SG} : Área de la superficie generada

$$A_{SG} = 2\pi\bar{x} \cdot \ell$$

SEGUNDO CASO Para sólidos generados

Si en un plano se tiene una recta L y en uno de los semiplanos que determina se tiene, la región R de área "A", al hacer girar esta región alrededor de la recta L se obtiene un sólido cuyo volumen se calcula conociendo el área A y la distancia $\bar{x}$, del centroide de la región a la recta L .



- A : Área de la región que gira
 C : Centroide de la región que gira
 $\bar{x}$: Distancia del centroide C hacia $\overline{L}$
 V_{SG} : Volumen del sólido generado

$$V_{SG} = 2\pi\bar{x} A$$

TEOREMA

a) Distancia del centroide de la semicircunferencia al diámetro: $d_1 = \frac{2r}{\pi}$

Dato : Radio de la semicircunferencia "r".

Por Demostrar: Distancia del centroide "c" al diámetro AB.

$$d_1 = \frac{2r}{\pi}$$

- Hacemos girar la semicircunferencia, tomando como eje $\bar{L}$

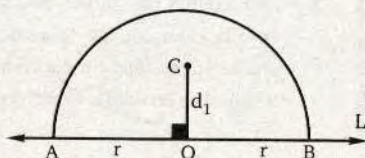
- Por Pappus se cumple:

$$S_{G(AB)} = 2\pi d_1 \cdot \ell; \text{ donde } \ell = \pi r$$

$$S_{(\text{Superficie esférica})} = 2\pi d_1 \cdot \pi r$$

$$4\pi r^2 = 2\pi d_1 \cdot \pi r$$

$$\therefore d_1 = \frac{2r}{\pi}$$



b) Distancia del centroide de un semicírculo al diámetro. $d_2 = \frac{2r}{3\pi}$

Dato : Radio del semicírculo "r".

Por Demostrar: Distancia del centroide "c" al diámetro AB

$$d_2 = \frac{2r}{3\pi}$$

- Hacemos girar el semicírculo, tomando como eje de giro $\bar{L}$

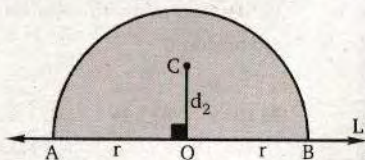
- Por Pappus se cumple:

$$V_{G(\text{Semicírculo})} = 2\pi d_2 \cdot \text{Área}$$

$$V_{(\text{Esfera})} = 2\pi d_2 \cdot \pi r^2$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi d_2 \cdot \pi r^2$$

$$\therefore d_2 = \frac{2r}{3\pi}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos esferas tangentes exteriores reposan sobre un mismo plano. Si los radios de las esferas miden 12cm y 27cm, halle la distancia entre los puntos de reposo.

A) 28cm B) 30cm C) 35cm
D) 32cm E) 36cm

2. Una cuerda de radio: $r=2\text{mm}$ se enrolla fuertemente obteniéndose una esfera de radio: $R=3\text{cm}$, halle la longitud de la cuerda, suponiendo que no hay espacios libres en el arrollamiento.

A) 3m B) 6m C) 9m
D) 12m E) 15m

3. Halle el volumen de una esfera circunscrita a un rectoedro cuyas dimensiones son a , $2a$, $3a$.

A) $\frac{7}{3}\sqrt{14}\pi a^3$ B) $\frac{7}{2}\sqrt{7}\pi a^3$
C) $\frac{\sqrt{7}}{3}\pi a^3$
D) $\frac{\sqrt{14}}{3}\pi a^3$ E) $\frac{\sqrt{14}}{14}\pi a^3$

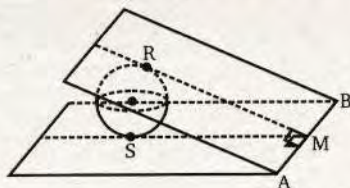
4. Un esfera de volumen " V " es calentada hasta que su radio se incrementa en un décimo, el nuevo volumen de la esfera será:

A) $10^{-3}V$ B) $1,1V$ C) $1,21V$
D) $1,331V$ E) $1,030V$

5. La razón entre las longitudes de la altura de un cono de revolución y el radio de la esfera circunscrita al cono es igual a $8/5$, halle la relación de los volúmenes de estos sólidos.

A) $\frac{18}{15}$ B) $\frac{16}{25}$ C) $\frac{16}{125}$
D) $\frac{32}{25}$ E) $\frac{32}{125}$

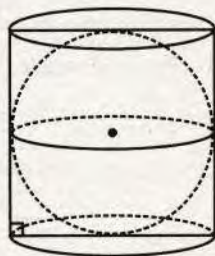
6. En la figura, la esfera es tangente a las caras del diedro $\overline{AB}$ en R y S . Si el diedro mide 37° y $SM=9\text{cm}$, halle el volumen de la esfera.



A) $27\pi\text{cm}^3$ B) $30\pi\text{cm}^3$ C) $36\pi\text{cm}^3$
D) $32\pi\text{cm}^3$ E) $25\pi\text{cm}^3$

7. En la figura, el depósito cilíndrico está lleno de agua, se introduce completamente la esfera. Halle la relación entre los volúmenes del agua que queda en el depósito y el agua al inicio.

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{1}{4}$



8. Hallar la razón entre los volúmenes de un cono equilátero y una esfera inscrita en dicho cono.

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{6}{5}$
D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

9. Una esfera se encuentra inscrita en un cilindro de revolución. Hallar en qué relación se encuentran las áreas de la esfera y del cilindro.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

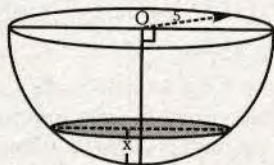
10. En una esfera de radio "R" se inscribe un cono de altura "h" y base de radio "r" la relación entre r, h y R es:

A) $h + r = 2R$ B) $h = R + r$
C) $r^2 + h^2 = 2hR$
D) $R^2 + r^2 = 2rh$ E) $R^2 + h^2 = 2Rh$

11. En una superficie esférica de radio R, una zona esférica de altura $R/4$, es equivalente a un huso. Halle la medida del ángulo correspondiente al huso.

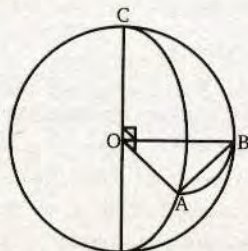
A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 90

12. En la figura, se tiene un depósito semiesférico de centro O, conteniendo cierta cantidad de agua. Si el área del espejo circular del agua es $9\pi m^2$, halle la profundidad del agua.



A) 1m B) 1,2m C) 1,5m
D) 0,8m E) 1,6m

13. En la figura, se tiene una cuña esférica. Si el área del sector circular AOB es $6\pi m^2$ y $AB=OA=OC$, halle el volumen de la cuña.



A) $52\pi m^3$ B) $48\pi m^3$ C) $45\pi m^3$
D) $42\pi m^3$ E) $40\pi m^3$

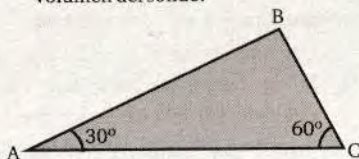
14. Halle el volumen de la cuña esférica, si el área del huso esférico de 30° es $48\pi m^2$.

A) $190\pi m^3$ B) $192\pi m^3$ C) $193\pi m^3$
D) $194\pi m^3$ E) $196\pi m^3$

15. Calcular el área de la superficie generada por la circunferencia cuyo radio mide 3m, si gira 360° alrededor de una recta tangente a la circunferencia.

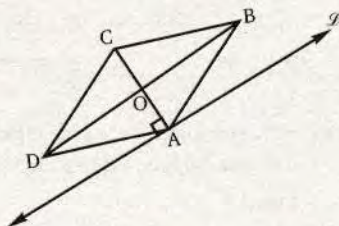
A) $36\pi^2$ B) $38\pi^2$ C) $40\pi^2$
D) $42\pi^2$ E) $50\pi^2$

16. En la figura, la región triangular ABC gira 360° alrededor de $\overline{AC}$ generando un sólido. Si $BC = 6m$, halle el volumen del sólido.



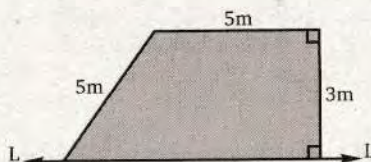
A) $100\pi m^3$ B) $112\pi m^3$ C) $110\pi m^3$
D) $108\pi m^3$ E) $96\pi m^3$

17. En la figura mostrada, ABCD es un rombo, $BO = 4m$, $BC = 5m$. Halle el volumen del sólido generado por la superficie rómbica al girar 360° alrededor de la recta $\mathcal{L}$.



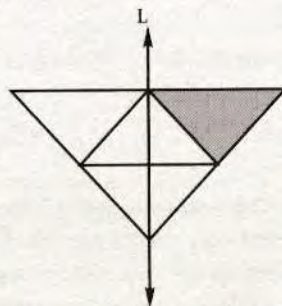
A) $124\pi m^3$ B) $125\pi m^3$ C) $132\pi m^3$
D) $136\pi m^3$ E) $144\pi m^3$

18. Al rotar la región sombreada un ángulo de 360° alrededor de la recta L , se obtiene un sólido cuyo volumen es:



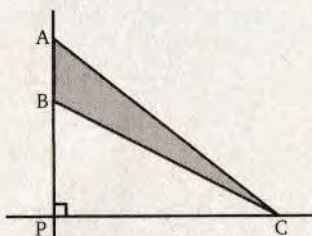
A) $47\pi m^3$ B) $50\pi m^3$ C) $60\pi m^3$
D) $57\pi m^3$ E) $25\pi m^3$

19. En la figura todos los triángulos son equiláteros, los pequeños tienen lados de longitud "a". Si tomamos como eje de revolución la recta "L" entonces el volumen del sólido generado por el triángulo sombreado es:

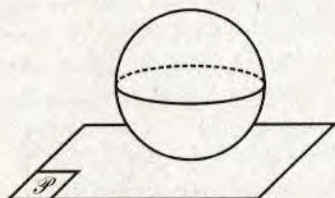


A) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ C) $\frac{7\sqrt{3}\pi a^3}{24}$
D) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$

20. En una figura $AB = PC = 6$ cm, el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar el triángulo ABC alrededor de la recta "AB" es.



- A) $108\pi\text{cm}^3$ B) $72\pi\text{cm}^3$ C) $60\pi\text{cm}^3$
D) $27\pi\text{cm}^3$ E) $24\pi\text{cm}^3$
21. En la figura, la proyección ortogonal de la esfera sobre el plano $\mathcal{P}$ es una región de área $12\pi\text{m}^2$. Hallar el área de la superficie esférica.



- A) $70\pi\text{m}^2$ B) $48\pi\text{m}^2$ C) $58\pi\text{m}^2$
D) $60\pi\text{m}^2$ E) $64\pi\text{m}^2$
22. Calcular el área (en u^2) del casquete esférico determinado por un plano secante a una esfera, trazado a una distancia del centro igual a la mitad del radio, siendo el área de la superficie esférica igual a 48u^2 .
- A) 24 B) 12 C) 8
D) 6 E) 4

23. Una pecera tiene una base rectangular, de longitudes 18 y 10, en su interior se colocan dos esferas idénticas de volumen $500\pi/3$. Calcule el volumen de la pecera, si estando dentro las esferas, hay que llenarla de agua para mojar completamente ambas esferas.

A) 3880 B) 2880 C) 4880
D) 2770 E) 1880

24. Pintar el piso de un reservorio de agua que tiene forma de semiesfera cuesta $S/$ a. ¿Qué costo tendrá pintar el exterior?

A) $S/3a$ B) $S/\frac{4a}{3}$ C) $S/\frac{3a}{2}$
D) $S/4a$ E) $S/2a$

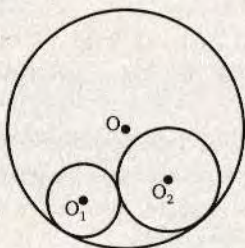
25. Un cilindro circular recto cuyo radio mide 5cm contiene cierta cantidad de agua. Si se introducen 3 esferas de igual radio y el nivel del agua sube 4,32cm, entonces la longitud del radio (en cm) de cada esfera es

A) 1,2 B) 1,5 C) 2,0
D) 2,5 E) 3,0

26. Las caras semicirculares de una cuña esférica forman un diedro de 36° . Si el área de la superficie esférica es $400\pi\text{cm}^2$, halle el área total de la cuña

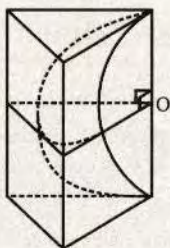
A) $130\pi\text{cm}^2$ B) $132\pi\text{cm}^2$ C) $136\pi\text{cm}^2$
D) $140\pi\text{cm}^2$ E) $144\pi\text{cm}^2$

27. En la figura, dos esferas tangentes entre sí reposan en una superficie esférica cuyo radio mide 20cm. Si los radios de las esferas miden 6cm y 8cm, halle el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de las esferas y de la superficie esférica.



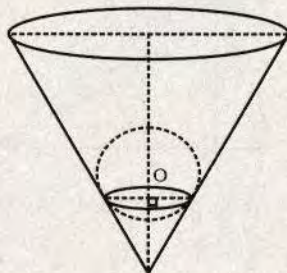
- A) $24\sqrt{10}\text{cm}^2$ B) $16\sqrt{10}\text{cm}^2$
 C) $20\sqrt{10}\text{cm}^2$
 D) $18\sqrt{10}\text{cm}^2$ E) $21\sqrt{10}\text{cm}^2$
28. En la figura, la cuña esférica está inscrita en el prisma triangular regular cuyo volumen es $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{m}^3$.

Halle el volumen de la cuña.

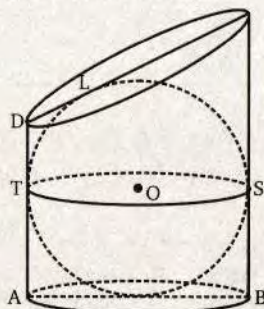


- A) $\frac{\pi}{2}\text{m}^3$ B) $\frac{4\pi}{9}\text{m}^3$ C) $\frac{\pi}{3}\text{m}^3$
 D) $\frac{\pi}{4}\text{m}^3$ E) $\frac{2\pi}{9}\text{m}^3$

29. En la figura, una esfera cuyo radio mide 2cm se introduce en la superficie del cono equilátero. Halle el volumen comprendido entre el casquete próximo al vértice y la superficie del cono.



- A) $\frac{4}{3}\pi\text{cm}^3$ B) $\frac{3}{4}\pi\text{cm}^3$ C) $\frac{4}{5}\pi\text{cm}^3$
 D) $\frac{5}{4}\pi\text{cm}^3$ E) πcm^3
30. En la figura, O es centro de la esfera que está inscrita en el tronco de cilindro recto y $CS=4DT=20\text{cm}$. Halle el volumen de la esfera.



- A) $\frac{2044}{3}\pi\text{cm}^3$ B) $\frac{4000}{3}\pi\text{cm}^3$
 C) $\frac{2045}{3}\pi\text{cm}^3$
 D) $\frac{2041}{3}\pi\text{cm}^3$ E) $\frac{2047}{3}\pi\text{cm}^3$

31. Una esfera de centro O y radio R es secante a dos esferas de radios $2R$ y $3R$. Si O es el punto común a dichas esferas, calcular en que relación se encuentran las áreas de los casquetes determinados por la esfera menor en las otras dos.

A) 1:1 B) 2:3 C) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$
D) 4:9 E) 8:27

32. Se tiene una superficie esférica de radio R , un plano secante divide a un diámetro perpendicularmente en dos segmentos de longitudes m y n ($m < n$) y determina en la superficie esférica una circunferencia menor de diámetro $4u$. Calcule el producto de las áreas (en u^2) de los casquetes esféricos determinados en la superficie esférica por el plano.

A) $16\pi^2 R^2$ B) $4\pi^2 R^2$ C) $2\pi^2 R^2$
D) $\pi^2 R^2$ E) $\frac{\pi^2 R^2}{2}$

33. Se tiene un cono equilátero de vértice B y centro de la base O . Una esfera de diámetro $\overline{BO}$ y radio 2 determina con el cono un casquete esférico menor determine su área.

A) 6π B) 8π C) 7π
D) 4π E) 5π

34. Un tronco de cono circular recto está circunscrito a una esfera. Si la longitud de la generatriz del tronco de cono es $35u$, entonces el área lateral (en u^2) del tronco de cono es.

A) 1200π B) 1225π C) 1250π
D) 1275π E) 1300π

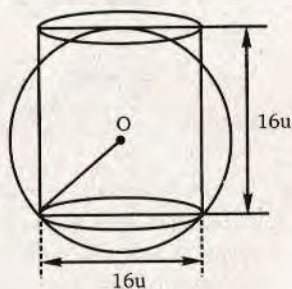
35. Una superficie esférica de centro O radio $6u$ es tangente a un plano P en el punto T . A es un punto de la superficie esférica en la prolongación de TO . Q es un plano que contiene al punto A . La distancia de O al plano Q es $4u$ entonces el área (en u^2) del mayor casquete esférico determinado por el plano Q en la superficie esférica es.

A) 50π B) 60π C) 120π
D) 70π E) 81π

36. En un cilindro esta inscrito una esfera y un cono, calcule el área (en u^2) del casquete menor que determina la intersección del cono con la esfera, si el radio de la esfera mide $\sqrt{5}u$.

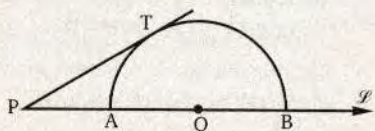
A) 2π B) 4π C) 5π
D) 8π E) $2\pi(5 - \sqrt{5})$

37. En la figura mostrada, el volumen de la esfera (en u^3) es



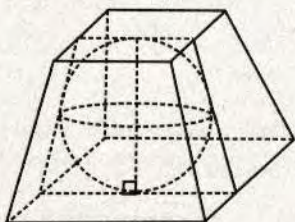
A) 288π B) $\frac{2048\pi}{3}$ C) 972π
D) $\frac{4000\pi}{3}$ E) 2304π

38. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia, T es punto de tangencia y $AB=2AP=12\text{m}$. Si $\overline{PT}$ y $\overline{TB}$ rotan 360° alrededor de $\mathcal{Q}$ halle el área de la superficie generada.



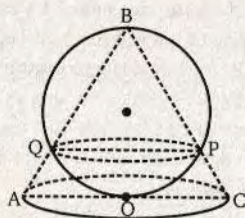
- A) $162\pi\text{m}^2$ B) $172\pi\text{m}^2$ C) $136\pi\text{m}^2$
D) $154\pi\text{m}^2$ E) $178\pi\text{m}^2$

39. En la figura, se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyos lados de las bases miden 2m y 8m. Hallar el área de la superficie esférica inscrita en dicho tronco.



- A) $16\pi\text{m}^2$ B) $15\pi\text{m}^2$ C) $14\pi\text{m}^2$
D) $18\pi\text{m}^2$ E) $17\pi\text{m}^2$

40. En la figura, la superficie es tangente a la base del cono equilátero en su centro O. Hallar la razón entre los volúmenes de los conos de generatrices $\overline{BQ}$ y $\overline{AB}$.

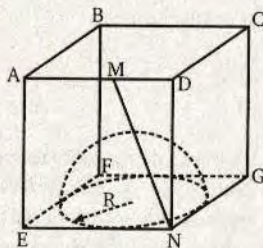


- A) $\frac{27}{50}$ B) $\frac{4}{45}$ C) $\frac{4}{9}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{27}{64}$

41. En un cono de revolución el radio de la base y el radio de la esfera inscrita miden 4cm y 2cm respectivamente. Hallar el volumen del cono de revolución en cm^3 .

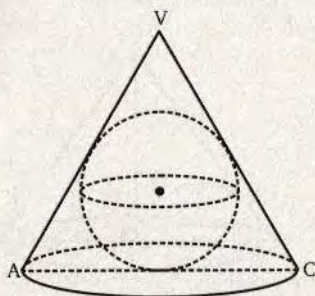
- A) $\frac{256}{3}\pi$ B) $\frac{256}{5}\pi$ C) $\frac{256}{7}\pi$
D) $\frac{256}{9}\pi$ E) $\frac{256}{11}\pi$

42. En la figura, $AM=MD$, $MN = 5\sqrt{5}\text{m}$. Hallar el área de la superficie total de la semiesfera cuya base está inscrita en la cara del exaedro regular.



- A) $65\pi\text{m}^2$ B) $75\pi\text{m}^2$ C) $85\pi\text{m}^2$
D) $70\pi\text{m}^2$ E) $68\pi\text{m}^2$

43. En la figura, $VC=6m$. Hallar el volumen de la esfera inscrita en el cono equilátero $V-AC$.



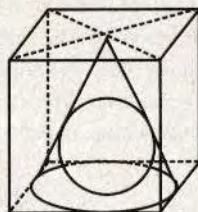
- A) $5\sqrt{6}\pi m^3$ B) $2\sqrt{2}\pi m^3$ C) $3\sqrt{3}\pi m^3$
D) $4\sqrt{2}\pi m^3$ E) $4\sqrt{3}\pi m^3$
44. ¿En qué relación se encuentran las áreas de las esferas inscrita y circunscrita a un cubo?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

45. Hallar el área de la esfera tangente a las aristas de un cubo de arista ℓ .

- A) $\pi\ell^2$ B) $2\pi\ell^2$ C) $\sqrt{2}\pi\ell^2$
D) $\frac{3}{2}\pi\ell^2$ E) $\frac{4}{3}\pi\ell^2$

46. En la figurar el volumen de la esfera si el volumen del cubo es $216(\sqrt{5}+1)^3 cm^3$.

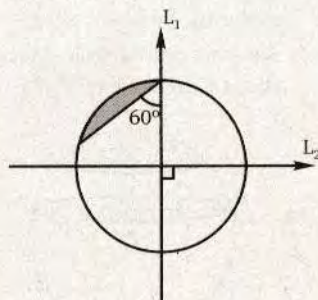


- A) $264\pi cm^3$ B) $282\pi cm^3$ C) $288\pi cm^3$
D) $256\pi cm^3$ E) $216\pi cm^3$

47. En una esfera de radio R se inscribe un paralelepípedo. Halle el volumen máximo del paralelepípedo.

- A) $\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$ B) $3R^3$ C) $\frac{5}{8}\sqrt{2}R^3$
D) $\frac{3}{5}R^3$ E) $4R^3$

48. Hallar la relación de volúmenes que se tendrá al hacer girar la región sombreada alrededor de L_1 y luego alrededor de L_2 .



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

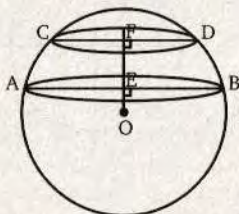
49. Calcular el volumen (en u^3) del segmento esférico de una sola base, si el área del casquete esférico correspondiente es cuatro veces el área de la base. El radio de la esfera mide $4\sqrt{3}u$

A) $144\sqrt{3}\pi$ B) $216\sqrt{3}\pi$
 C) $256\sqrt{3}\pi$
 D) $180\sqrt{3}\pi$ E) $200\sqrt{3}\pi$

50. Una esfera es seccionada por dos planos paralelos a un mismo lado de un círculo máximo determinando secciones de áreas πm^2 y $16m^2$. Si la distancia entre los dos planos es 3m, halla el área de la superficie esférica.

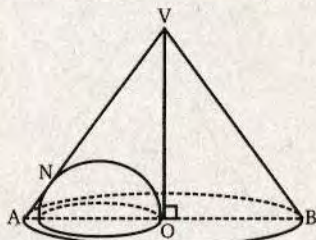
A) $68\pi m^2$ B) $72\pi m^2$ C) $36\pi m^2$
 D) $54\pi m^2$ E) $76\pi m^2$

51. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de las circunferencias menores, $2FD = 2EF = EB = 4m$. Si O es centro de la superficie esférica, halle el área de la zona esférica de altura $\overline{EF}$.



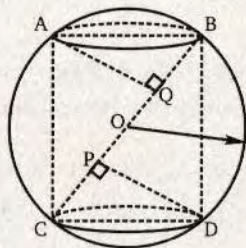
A) $4\sqrt{5}\pi m^2$ B) $6\sqrt{5}\pi m^2$
 C) $8\sqrt{5}\pi m^2$
 D) $7\sqrt{5}\pi m^2$ E) $9\sqrt{5}\pi m^2$

52. En la figura, N es punto de tangencia y $\widehat{m\hat{A}VB} = 106^\circ$. Si el volumen del cono de revolución es $16m^3$, halle el volumen de la semiesfera.



A) $2\pi m^3$ B) $\frac{5}{2}\pi m^3$
 C) $\frac{9}{4}\pi m^3$
 D) $\frac{9}{2}\pi m^3$ E) $3\pi m^3$

53. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diametralmente opuestas. Si $CD=PQ=6m$, halle el área de la superficie esférica.

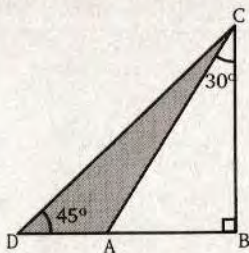


A) $144\pi m^2$ B) $121\pi m^2$ C) $120\pi m^2$
 D) $169\pi m^2$ E) $125\pi m^2$

54. En un arco $\widehat{AB}$ se ubica un punto C, las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ están en relación de 4 a 3 respectivamente. Si $AC+CB=28\text{cm}$ y $m\widehat{ACB} = 90^\circ$, halle el área de la superficie de revolución generada por el arco $\widehat{AB}$.

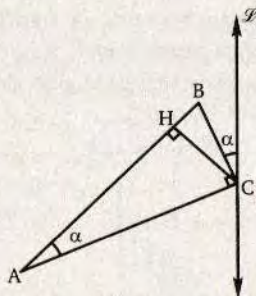
A) $380\pi\text{cm}^2$ B) $390\pi\text{cm}^2$ C) $400\pi\text{cm}^2$
D) $410\pi\text{cm}^2$ E) $420\pi\text{cm}^2$

55. En la figura, la región sombreada gira 360° alrededor de la recta $\overline{BC}$ generando un sólido. Si $AB = 4\sqrt{3}\text{cm}$, halle el volumen del sólido.



A) $384\pi\text{cm}^3$ B) $396\pi\text{cm}^3$ C) $372\pi\text{cm}^3$
D) $364\pi\text{cm}^3$ E) $376\pi\text{cm}^3$

56. En la figura, el triángulo ABC y la recta $\mathcal{L}$ son coplanares, $AB = 6\text{m}$ y $CH = 2\text{m}$. Halle el volumen del sólido generado por la región triangular ACB al girar 360° alrededor de la recta $\mathcal{L}$.



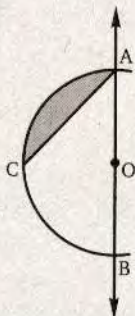
A) $24\pi\text{m}^3$ B) $25\pi\text{m}^3$ C) $26\pi\text{m}^3$
D) $27\pi\text{m}^3$ E) $28\pi\text{m}^3$

57. Se tiene el triángulo rectángulo ABC, $BC = 2r$, se construye exteriormente el semicírculo de diámetro AB. Halle el volumen generado al girar la superficie formada alrededor del cateto BC.

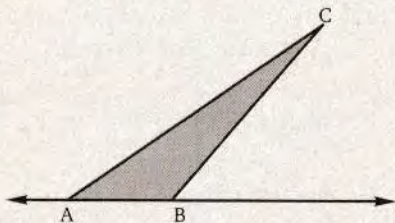
A) $\frac{\pi r^3}{8}(\pi + 3)$
B) $\frac{\pi r^3}{3}(3\pi + 8)$
C) $\frac{\pi r^3}{3}$
D) $\frac{\pi r^3}{8}(\pi - 2)$
E) $\frac{\pi r^3}{3}(\pi + 4)$

58. Hallar el área de la superficie del sólido generado por la rotación de la figura sombreada al girar alrededor del diámetro AB.

$$AB = 2r, m\widehat{AC} = 120^\circ$$



- A) $\frac{5}{2}\pi r^2$ B) $3\pi r^2$ C) $4\pi r^2$
 D) $\frac{9}{2}\pi r^2$ E) $5\pi r^2$
59. En la figura, $AB=2\text{cm}$, $BC=10\text{cm}$ y $AC=8\sqrt{2}\text{cm}$. Halle el volumen del sólido generado al girar 360° la región triangular ABC alrededor del eje que contiene al lado $\overline{AB}$.



- A) $\frac{121}{2}\pi\text{cm}^3$ B) $\frac{125}{3}\pi\text{cm}^3$
 C) $\frac{128}{3}\pi\text{cm}^3$
 D) $\frac{82}{3}\pi\text{cm}^3$ E) $\frac{81}{2}\pi\text{cm}^3$

60. Sea a la longitud del lado de un octógono regular, calcule el volumen del sólido generado por la mitad de la región poligonal, cuando gira alrededor de una diagonal que biseca la región poligonal.

- A) $(\sqrt{2}-\sqrt{2})\pi a^3$ B) $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)\pi a^3$
 C) $\frac{\pi a^3(\sqrt{2}+1)^2}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}$
 D) $\frac{\pi a^3(1+\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}}$ E) πa^3

61. Un hexaedro regular se inscribe en un hemisferio. Si la arista del hexaedro mide ℓ , entonces el volumen del sólido limitado por el hemisferio es

- A) $\frac{\sqrt{6}\pi\ell^3}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}\pi\ell^3}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}\pi\ell^3}{2}$
 D) $\frac{\sqrt{10}\pi\ell^3}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}\pi\ell^3}{3}$

62. Una superficie esférica es tangente a todas las aristas de un hexaedro regular de arista a . calcule el área de la superficie de la esfera exterior al hexaedro.

- A) $2\pi\sqrt{2}a^2$
 B) $2\pi(\sqrt{2}-1)a^2$
 C) $3\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)a^2$
 D) $4\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)a^2$
 E) $4\pi\sqrt{2}a^2$

63. Una esfera se encuentra inscrita en un tetraedro regular de arista a . Calcule su volumen.

A) $\frac{a^3 \sqrt{6}\pi}{212}$ B) $\frac{a^3 \sqrt{6}\pi}{218}$ C) $\frac{a^3 \sqrt{3}\pi}{124}$
D) $\frac{a^3 \sqrt{3}\pi}{136}$ E) $\frac{a^3 \sqrt{6}\pi}{216}$

64. En un cono circular recto está inscrita una esfera. La relación entre los volúmenes del cono y de la esfera es igual a 2. Entonces, la relación entre el área de la superficie total del cono y el área de la superficie esférica es.

A) 1,5 B) 2,5 C) 4
D) 3 E) 2

65. En una superficie esférica cuyo radio mide ℓ está inscrito un tetraedro regular. Entonces, el volumen del sólido limitado por el tetraedro es.

A) $\frac{\ell^3 \sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{9\ell^3 \sqrt{3}}{16}$ C) $\frac{\ell^3 \sqrt{3}}{8}$
D) $\frac{8\ell^3 \sqrt{3}}{27}$ E) $\frac{\ell^3 \sqrt{3}}{4}$

66. En un hexaedro regular se dibuja una superficie esférica tangente a una cara del hexaedro y tangente a las cuatro aristas de la cara opuesta. Si la arista del hexaedro regular mide ℓ , entonces el área de la superficie esférica es.

A) $\frac{15\pi\ell^2}{16}$ B) $\frac{25\pi\ell^2}{16}$ C) $\frac{29\pi\ell^2}{16}$
D) $\frac{35\ell^2}{16}$ E) $\frac{\pi\ell^3}{16}$

67. En un cono de revolución de altura 8u y base de radio 6u se inscribe una esfera, la cual es tangente a la superficie lateral del cono mediante una circunferencia. El plano de ésta circunferencia determina en la esfera un segmento esférico menor de una sola base. Entonces el volumen (en u^3) del segmento esférico es.

A) $\frac{117\pi}{125}$ B) $\frac{234\pi}{125}$ C) $\frac{351\pi}{125}$
D) $\frac{468\pi}{125}$ E) $\frac{702\pi}{125}$

68. Se inscribe un hexaedro regular ABCD-A'B'C'D' de arista a en una superficie esférica.

Las caras ABCD, A'B'C'D', ABB'A' y CDC'D' están contenidas en planos que determinan en la superficie esférica porciones de superficies, 4 grandes, 2 medianas y 4 pequeñas. Entonces la diferencia de las áreas de todas las pequeñas menos todas las medianas es.

A) $\pi^2(\sqrt{2} - 1)$
B) $2\pi a^2(3 - 2\sqrt{3})$
C) $a\pi^2$
D) $\frac{3}{2}\pi a^2$
E) $2a\pi^2$

69. En una superficie esférica de radio R está inscrito un cono circular recto. Si el volumen del sólido limitado por el cono es máximo, entonces la longitud de la altura del cono es.

A) $\frac{2R}{5}$ B) $\frac{8R}{3}$ C) $\frac{4R}{3}$
D) $\frac{5R}{3}$ E) $\frac{7R}{3}$

70. Una esfera circunscrita a un tetraedro regular tiene volumen V , calcule el volumen de la esfera tangente a las aristas de dicho tetraedro.

A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$ B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)V$ C) $\left(\frac{3}{12}\right)V$
D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)V$ E) $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)V$

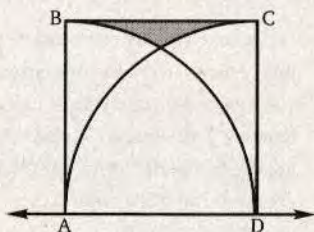
71. La longitud de la arista de un octaedro regular es $\sqrt{3} + \sqrt{6}$, si se traza una esfera tangente a todas sus aristas, calcule el área del menor casquete esférico determinado por una cara del octaedro.

A) $\pi/3$ B) $\pi/4$ C) $\pi/2$
D) $\pi/5$ E) $\pi/6$

72. En el plano se encuentran tres esferas congruentes cuyos radios miden R unidades, cada una de las cuales hace contacto con las otras dos. Una cuarta esfera hace contacto con cada una de las tres esferas dadas y con el plano. Calcule la longitud del radio de la cuarta esfera.

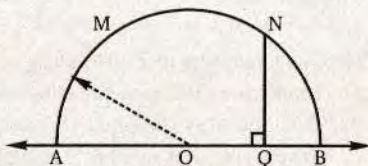
A) $R/5$ B) $R/4$ C) $R/3$
D) $2R/5$ E) $3R/5$

73. En una figura mostrada $ABCD$ es una región cuadrada y los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{BD}$ tiene su centro en los puntos D y A . Si $AD=1\text{cm}$, entonces el volumen (en cm^3) del sólido generado por la región sombreada, al girar alrededor de $\overline{AD}$ es



A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{4}$

74. En la figura $\widehat{MN} = m\widehat{NB}$, si $AQ = 3(QB)$. Calcule la razón de áreas de las superficies generadas por los arcos MN y NB al girar 360° en torno a $\overline{AB}$.



A) 3 B) $1/2$ C) 2
D) $1/3$ E) 1

75. Se tiene un semicírculo de diámetro $\overline{AC}$ en $\widehat{AC}$ se ubica el punto B y en $\widehat{BC}$ se ubica en punto medio M. Luego se traza $MH \perp AC$ ($H \in AC$).

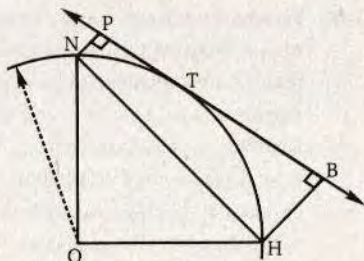
Si $(AC)(AH - HC)^2 = 36$. Calcule el volumen del sólido generado por el segmento circular de cuerda $\overline{AB}$ cuando gira alrededor de $\overline{AC}$.

- A) 6π B) 12π C) 24π
D) 9π E) π

76. En un trapecio isósceles ABCD ($BC \parallel AD$), $m \angle ABC = 3m \angle ADC$ y $BC = CD = a$, calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región ABCD alrededor de $\overline{AB}$.

- A) $\frac{\pi a^3(5 + 3\sqrt{2})}{6}$
B) $\frac{\pi a^3(6 + \sqrt{2})}{6}$
C) $\frac{\pi a^3(2 + \sqrt{2})}{6}$
D) $\frac{\pi a^3(5 + \sqrt{3})}{6}$
E) $\frac{\pi a^3(6 + \sqrt{3})}{6}$

77. En la figura $NP=2$; $HB=4$. Calcule el volumen del sólido generado por la región triangular que se forma al unir los puntos medios de $\overline{OH}$, $\overline{NH}$, $\overline{ON}$; al girar 360° alrededor de $\overline{PB}$. (T: Punto de tangencia).



- A) $\frac{200\pi}{3}$ B) $\frac{300\pi}{7}$ C) $\frac{400\pi}{3}$
D) $\frac{500\pi}{7}$ E) $\frac{200\pi}{3}$

78. Dado un cono equilátero inscrito en una esfera. ¿A qué distancia del centro habrá que trazar un plano secante paralelo a la base del cono para que la diferencia de las secciones sea igual al círculo base del cono?. El radio de la esfera es R.

- A) R B) $R/2$ C) $R/3$
D) $R/4$ E) $R/6$

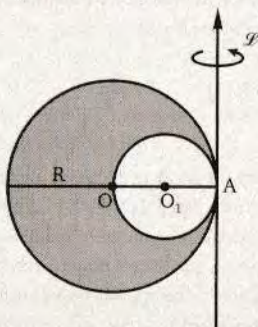
79. En un cono recto se ha inscrito una esfera cuyo radio mide r unidades. Calcule el volumen del cono, si el plano que hace contacto con la esfera y que es perpendicular a una de las generatrices del cono se encuentra a la distancia d del vértice del cono.

- A) $\frac{\pi r^2 (\sqrt{r^2 + (d+r)^2})^2}{3(d+r)^2}$
B) $\frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2})^3}{3(d+r)^2}$
C) a y b
D) $\frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2})^3}{3(d-r)^2}$

80. Si cuatro esferas congruentes de radio $r = 4\text{m}$, están inscritas en un hexaedro regular de tal manera que son tangentes a la base y a las caras laterales consecutivas dos a dos, entonces la longitud del radio (en m) de una quinta esfera tangente a las cuatro dadas ya la cara opuesta de la base es

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

81. Halle el volumen del sólido que se determina por la rotación de la región sombreada alrededor de la recta tangente $\mathcal{L}$. A es punto de tangencia O y O_1 son centros.



A) $\frac{1}{6}\pi^2 R^3$ B) $\frac{2}{3}\pi^2 R^3$ C) $\frac{4}{3}\pi^2 R^3$
D) $\frac{5}{3}\pi^2 R^3$ E) $\frac{7}{4}\pi^2 R^3$

82. El área de una región cuadrada ABCD mide 100cm^2 al girar la región cuadrada alrededor de un eje coplanar que pasa por el vértice D, se genera un sólido. Si el eje determina un ángulo agudo de 15° con $\overline{AD}$ (el eje no intercepta a la región cuadrada). halle el volumen del sólido generado (en cm^3).

A) $350\pi\sqrt{6}$ B) $450\pi\sqrt{6}$
C) $500\pi\sqrt{6}$
D) $550\pi\sqrt{6}$ E) $600\pi\sqrt{6}$

83. Hallar el volumen del sólido engendrado al girar una región octogonal regular ABCDE, 360° alrededor del eje $\overline{CD}$ si la distancia de su centro de gravedad a un vértice es a unidades.

A) $\frac{\pi}{4}\sqrt{16+8\sqrt{2}}a^3$
B) $\frac{\pi}{4}\sqrt{16+10\sqrt{2}}a^3$
C) $\frac{\pi}{2}\sqrt{8+4\sqrt{2}}a^3$
D) $\pi\sqrt{16+8\sqrt{2}}a^3$
E) $\frac{\pi}{4}\sqrt{8+\sqrt{2}}a^3$

84. En una semicircunferencia de diámetro AB se trazan las cuerdas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ que se intersectan en T tal que $m\angle MAB = m\angle NBA = 30^\circ$ y $AB = 4\sqrt{3}$. Calcule el volumen del sólido generado por la región triangular

mixtilínea MTN al girar una vuelta alrededor de $\overline{AB}$.

- A) $\frac{28\pi\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{27\pi\sqrt{3}}{7}$
D) $\frac{29\pi\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{28\pi\sqrt{3}}{9}$

85. En un cono de revolución se inscribe una esfera de radio R. Entonces, el volumen mínimo del cono es.

- A) $\frac{6\pi R^3}{5}$ B) $\frac{8\pi R^3}{3}$ C) $3\pi R^3$
D) $10\pi R^3$ E) $11\pi R^3$

86. En una esfera se han inscrito dos conos congruentes, cuyos ejes coinciden, y los vértices de los cuales se encuentran en los extremos opuestos del diámetro de la esfera. Hallar la relación entre el volumen de la parte común de estos dos conos y el volumen de la esfera, si la razón entre la altura h del cono recto y el radio R de la esfera es igual a K.

- A) $(K-1)\left(\frac{2}{K}-1\right)(K^2-5K+7)$
B) $\frac{1}{2}(K-1)\left(\frac{2}{K}-1\right)(K^2-5K+7)$
C) $(K-2)\left(\frac{2}{K}-1\right)(K^2-5K+7)$
D) $(K-2)\left(\frac{3}{K}-1\right)(K^2-5K+7)$
E) $(K-2)\left(\frac{3}{K}-1\right)(K^2-5K+7)$

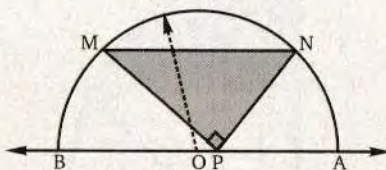
87. Una esfera es seccionada por tres planos paralelos que equidistan 6m y están a un mismo lado del círculo mayor paralelo. Si el radio de la sección intermedia mide 9m, halle el volumen del segmento esférico determinado por las otras dos secciones.

- A) $815\pi m^3$ B) $821\pi m^3$ C) $820\pi m^3$
D) $828\pi m^3$ E) $830\pi m^3$

88. En un octante de esfera de radio R, se inscribe una esfera, calcule el área de su superficie.

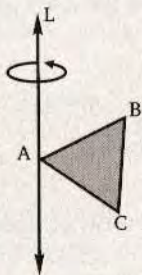
- A) $\pi R^2(4-\sqrt{3})$ B) $\pi R^2(5-2\sqrt{3})$
C) $\pi R^2(6-2\sqrt{3})$
D) $\pi R^2(4-2\sqrt{3})$ E) $\pi R^2(3-2\sqrt{3})$

89. En la figura; $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $AP = 6u$ y $PB = 8u$. Calcule el volumen del sólido que se genera al girar una vuelta la región MPN alrededor de $\overline{AB}$.

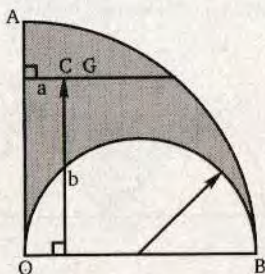


- A) $162\pi u^3$ B) $160\pi u^3$
C) $164\pi u^3$
D) $180\pi u^3$ E) $182\pi u^3$

90. En la figura mostrada el triángulo ABC es equilátero, C y B distan $4u$ y $5u$ de la recta L. Entonces, el volumen (en u^3) del sólido generado por la región triangular ABC al girar alrededor de la recta L es.



- A) $42\sqrt{3}$ B) $54\sqrt{3}$ C) 60π
 D) 48π E) $123\sqrt{3}\pi$
91. En la figura mostrada AOB es un cuadrante. Si CG es el centro de gravedad de la región sombreada, entonces a/b es.



- A) $\frac{16-3\pi}{12}$ B) $\frac{16-5\pi}{12}$
 C) $\frac{13-3\pi}{12}$
 D) $\frac{13-4\pi}{12}$ E) $\frac{19-2\pi}{12}$

92. En una región triangular ABC, $3AB=2BC$. Calcule la razón de volúmenes que generan las regiones triangulares, determinadas por la bisectriz interior BD, al girar alrededor de BD.

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{9}$
 D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{5}{9}$

93. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) se cumple que $AD=3BC$. Calcule la razón de volúmenes de los sólidos generados por la región trapecial al girar 360° , respecto a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

- A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{7}$

94. En una región triangular AOB recto en O, $AB=6u$, $AO=OB$; L es una recta coplanar con la región triangular cuya proyección de ésta región sobre L mide $5u$. Si O es un punto de L, entonces el volumen, en u^3 , del sólido que genera la región triangular al girar una vuelta alrededor de L es.

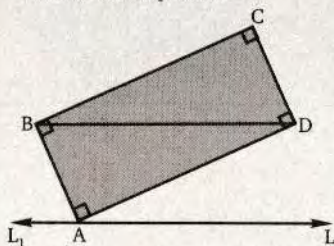
- A) 15π B) 20π C) 25π
 D) 30π E) 35π

95. La longitud del lado de un cuadrado ABCD es $20u$. Se traza una recta L por el vértice D, tal que forma un ángulo de 82° con el lado AD. Entonces, el área (en u^2) de la superficie generada

por el cuadrado al girar alrededor de la recta L una vuelta completa es.

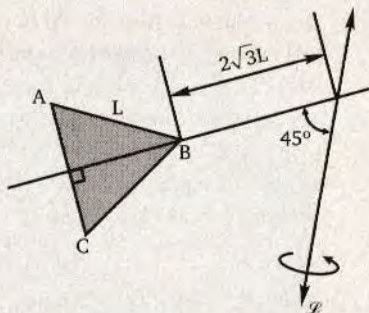
- A) $1180\sqrt{2}\pi$ B) $1280\sqrt{2}\pi$
C) $1380\sqrt{2}\pi$
D) $1480\sqrt{2}\pi$ E) $1580\sqrt{2}\pi$

96. En la figura mostrada ABCD es una región triangular, $\overline{BD} \perp \overline{LL_1}$. Si $AB=a$ y $BC=b$, entonces el volumen del sólido generado al rotar la región rectangular alrededor de la recta L una vuelta completa es.



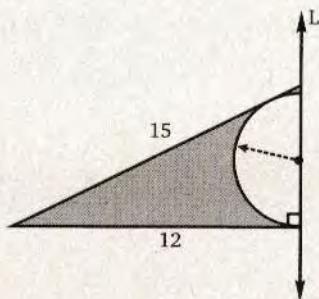
- A) $\frac{2\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$ B) $\frac{\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
C) $\frac{2\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
D) $\frac{2\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3}$ E) $\frac{\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3}$

97. En la figura mostrada el triángulo ABC es equilátero de lado L. Entonces, el volumen del sólido que se genera al rotar la región triangular alrededor de la recta indicada es.



- A) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi L^3$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{4}\pi L^3$ C) $\frac{\sqrt{2}}{7}\pi L^3$
D) $\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi L^3$ E) $\frac{7}{3}\pi L^3$

98. En la figura mostrada calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región sombreada alrededor del eje LL_1 .

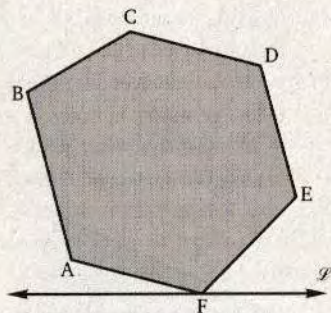


- A) $\frac{1232\pi}{3}$ B) $\frac{1040\pi}{3}$ C) $\frac{1428\pi}{3}$
D) $\frac{1364\pi}{3}$ E) $\frac{1356\pi}{3}$

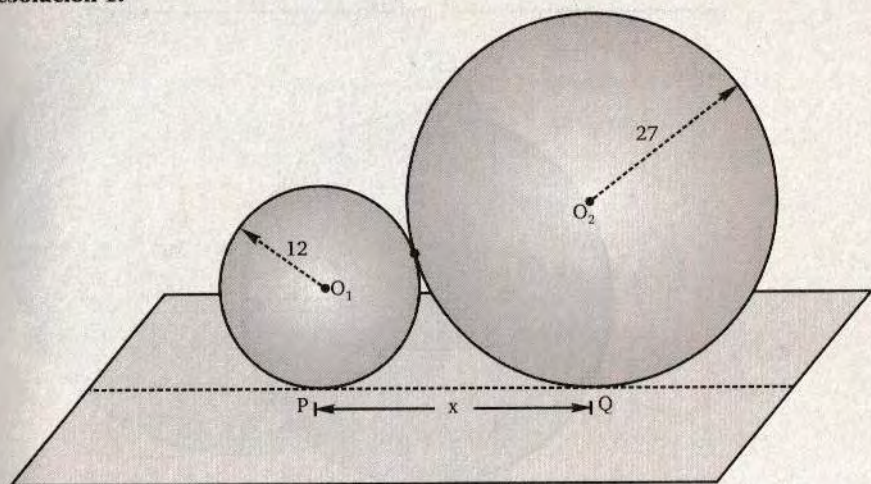
99. En un semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ y centro O se traza la cuerda CD (C en AD) tal que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$. Luego se traza $\overline{OH} \perp \overline{CD}$ (H en CD). Si $\overline{AD} \cap \overline{OH} = \{P\}$, $AP=4$ y $DP=2$. Calcule el volumen del sólido que se genera cuando la superficie limitada por $\widehat{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ gira una vuelta alrededor de $\overline{AB}$.

- A) $8\sqrt{3}\pi$ B) $16\sqrt{3}\pi$ C) 12π
D) $14\sqrt{3}\pi$ E) $12\sqrt{2}\pi$

100. En el gráfico la región $ABCDEF$ es regular, si $CE = a\sqrt{3}$ y la suma de las distancias de B y D a $\mathcal{L}$ es b , calcule el volumen del sólido generado por dicha región cuando gire 120° alrededor de $\mathcal{L}$.



- A) $a^2b\pi\sqrt{2}/3$ B) $a^2b\pi\sqrt{3}/3$
C) $a^2b\pi\sqrt{5}/3$
D) $a^2b\pi\sqrt{6}/3$ E) $a^2b\pi\sqrt{8}/3$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:**

Piden: $PQ = x$; el cual es calcularse mediante el teorema para circunferencia tangentes.

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{rR}$$

$$x = 2\sqrt{12 \times 27}$$

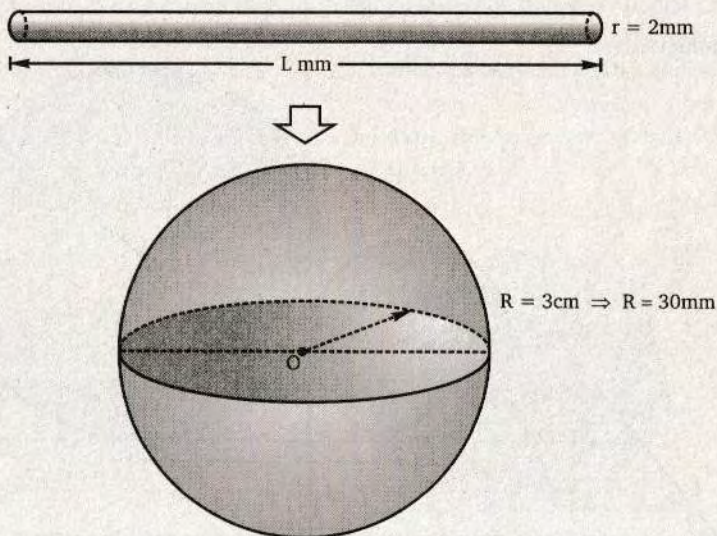
$$x = 2\sqrt{4 \times 3 \times 27}$$

$$81$$

$$\therefore x = 36\text{cm}$$

Rpta.: E

Resolución 2:



Piden: L

En el proceso el volumen se mantiene constante:

$$\Rightarrow V_{\text{cuerda}} = V_{\text{esf}}$$

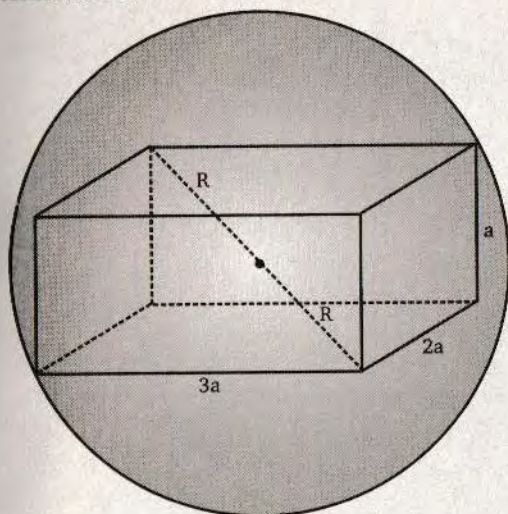
$$\pi(2)^2(L) = \frac{4}{3} \pi (30)^3$$

$$\Rightarrow L = 9000\text{mm}$$

$$\therefore L = 9\text{m}$$

Rpta.: C

Resolución 3:



Piden: V_{esf}

Se sabe que:

$$(2R)^2 = (a)^2 + (2a)^2 + (3a)^2$$

$$4R^2 = 14a^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{14}}{2} a$$

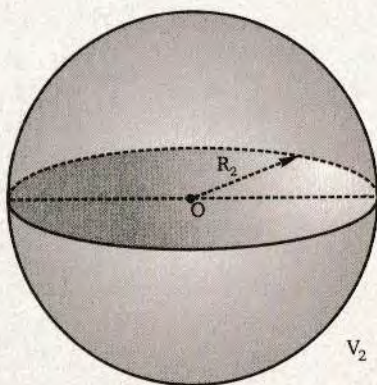
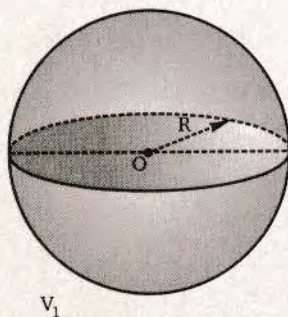
Luego:

$$V_{\text{esf}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{14}}{2} a \right)^3$$

$$\therefore V_{\text{esf}} = \frac{7}{3} \sqrt{14} \pi a^3$$

Rpta.: A

Resolución 4:



Piden: V_2

$$V_1 = V$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = V$$

$$\text{Dato: } R_2 = R + \frac{R}{10}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{11R}{10}$$

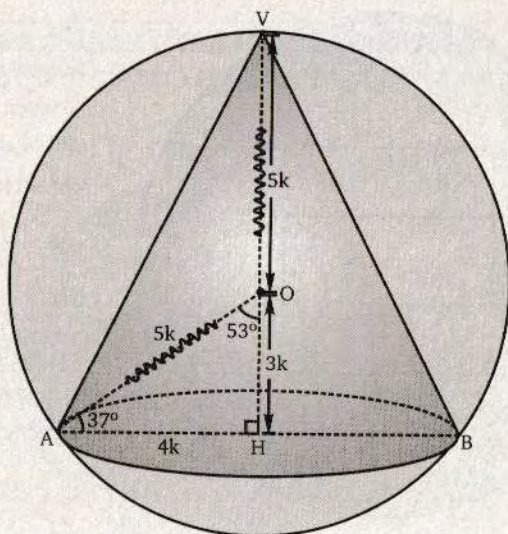
$$\Rightarrow V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{11R}{10} \right)^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{1331}{1000}$$

$$\therefore V_2 = 1,331V$$

Rpta.: D

Resolución 5:



$$\text{Piden: } \mu = \frac{V_{\text{cono}}}{V_{\text{esfera}}}$$

$$\text{Dato: } \frac{VH}{OA} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OV = 5k \\ OH = 3k \end{cases}$$

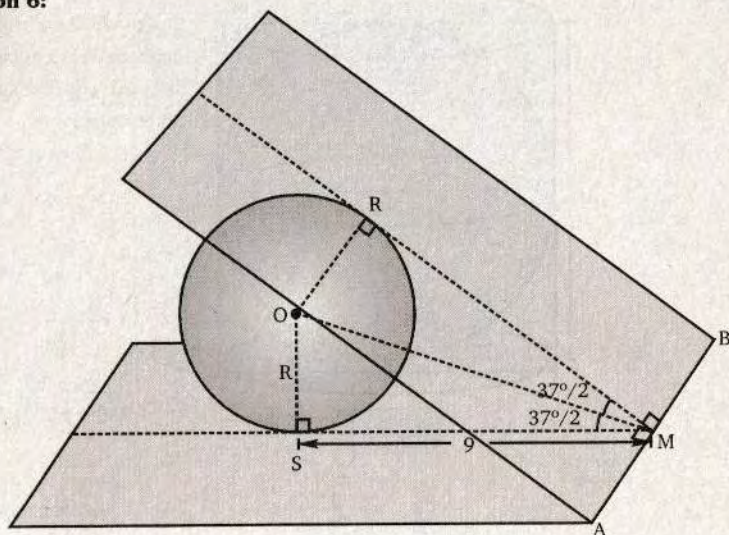
$\angle AOH$ (Notable de 37° y 53°): $AH = 4k$

$$\text{Luego: } \mu = \frac{\frac{\pi}{3}(4k)^2(8k)}{\frac{4}{3}\pi(5k)^2}$$

$$\therefore \mu = \frac{32}{125}$$

Rpta.: E

Resolución 6:



Piden: V_{esf}

Dato: $m\angle RMS = 37^\circ$

$$\Rightarrow m\angle SMO = \frac{37^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle SMO \text{ (notable de } \frac{37^\circ}{2})$$

$$\Rightarrow R = \frac{SM}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\Rightarrow R = 3$$

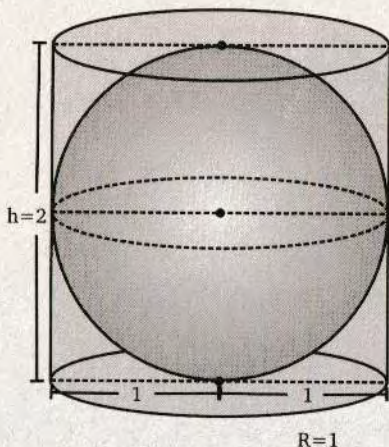
Luego:

$$\Rightarrow V_{\text{esf}} = \frac{4}{3} \pi (3)^3$$

$$\therefore V_{\text{esf}} = 36\pi \text{ cm}^3$$

Rpta.: C

Resolución 7:



$$\mu = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{3}$$

Rpta.: A

Piden: la relación de volúmenes de agua final e inicial; la cual no depende de la longitud del radio "R", por ello tomamos convenientemente

$$R = 1 \rightarrow h = 2$$

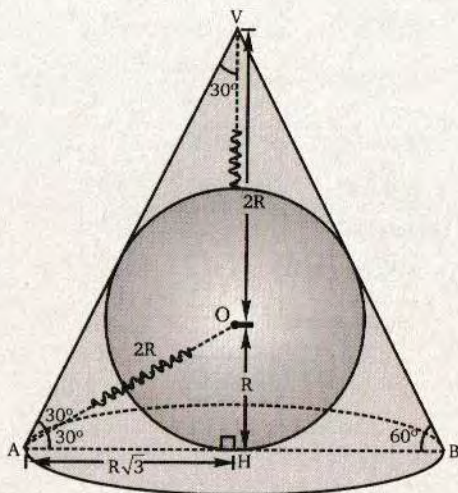
$$\Rightarrow V_{cil} = 2\pi \wedge V_{esf} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\mu = \frac{V_{final}}{V_{inicial}}$$

$$\mu = \frac{V_{cil} - V_{esf}}{V_{cil}}$$

$$\mu = \frac{2\pi - \frac{4\pi}{3}}{2\pi}$$

Resolución 8:



Piden:

$$\mu = \frac{V_{cono}}{V_{esf}}$$

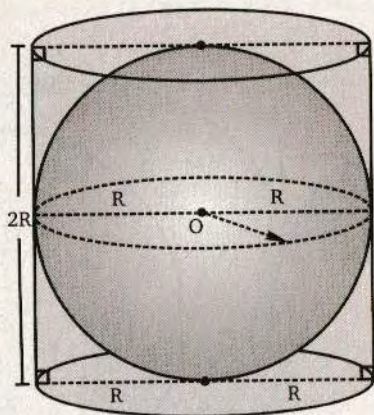
$$\mu = \frac{\frac{\pi}{3}(R\sqrt{3})^2(3R)}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3}$$

$$\mu = \frac{(3)(3)}{4}$$

$$\therefore \mu = \frac{9}{4}$$

Rpta.: A

Resolución 9:



Piden:

$$\mu = \frac{S_{\text{esf}}}{S_{\text{cil}}}$$

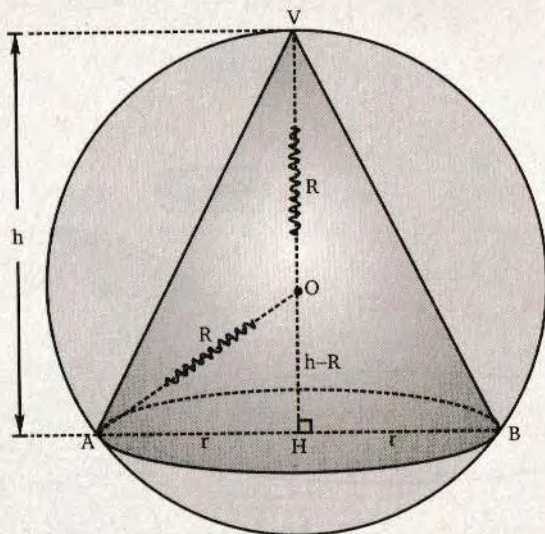
$$\mu = \frac{4\pi R^2}{2\pi R(2R + R)}$$

$$\mu = \frac{4R^2}{6R^2}$$

$$\therefore \mu = \frac{2}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 10:



$\triangle AOH$ (Teorema de Pitágoras)

$$(R)^2 = (r)^2 + (h-R)^2$$

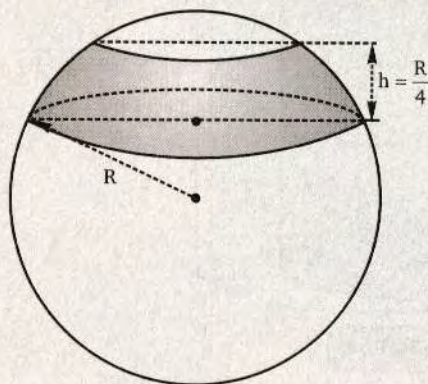
$$R^2 = r^2 + h^2 - 2hR + R^2$$

$$r^2 + h^2 = 2hR$$

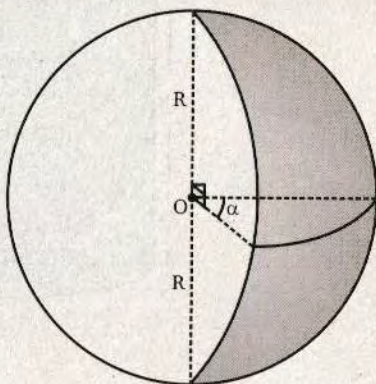
Rpta.: C

Resolución 11:

ZONA ESFÉRICA



HUSO ESFÉRICA

Piden: α

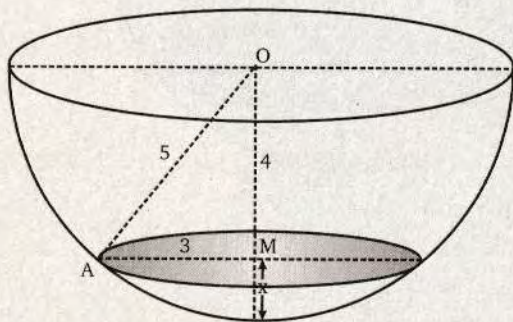
$$S_{\text{zona}} = S_{\text{huso}}$$

$$2\pi R \left(\frac{R}{4} \right) = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{90^\circ}$$

$$\therefore 45^\circ = \alpha$$

Rpta.: C

Resolución 12:

Piden: x

$$\text{Dato: } S_{\text{espejo}} = 9\pi$$

$$\pi(AM)^2 = 9\pi$$

$$\Rightarrow AM = 3$$

 $\triangle AOM$ (Notable de 37° y 53°)

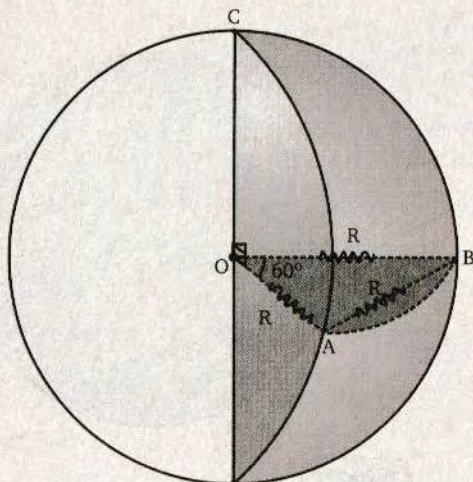
$$\Rightarrow OM = 4$$

$$\Rightarrow 4 + x = 5$$

$$\therefore x = 1\text{m}$$

Rpta.: A

Resolución 13:



Piden: $V_{\text{cuña}}$

Datos: $AB = OA = OC = R$

$\Rightarrow \triangle OAB: \text{Equilatero}$

$\Rightarrow m\angle AOB = 60^\circ$

También: $S_{\triangle OAB} = 6\pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2}{6} = 6\pi$$

$$\Rightarrow R = 6$$

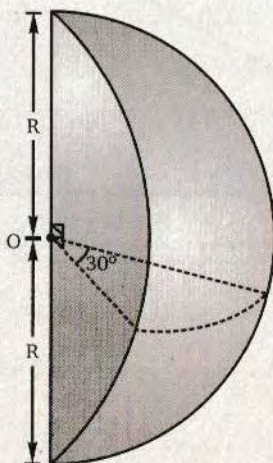
Luego:

$$V_{\text{cuña}} = \pi (6)^3 \left(\frac{60^\circ}{270^\circ} \right)$$

$$\therefore V_{\text{cuña}} = 78\pi \text{ m}^3$$

Rpta.: B

Resolución 14:



Piden: $V_{\text{cuña}}$

Datos: $S_{\text{huso}} = 48\pi$

$$\Rightarrow \pi R^3 \left(\frac{30^\circ}{90^\circ} \right) = 48\pi$$

$$\Rightarrow R = 12$$

$$\text{Luego: } V_{\text{cuña}} = \pi (12)^2 \left(\frac{30^\circ}{270^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow V_{\text{cuña}} = 192\pi \text{ m}^3$$

Rpta.: B

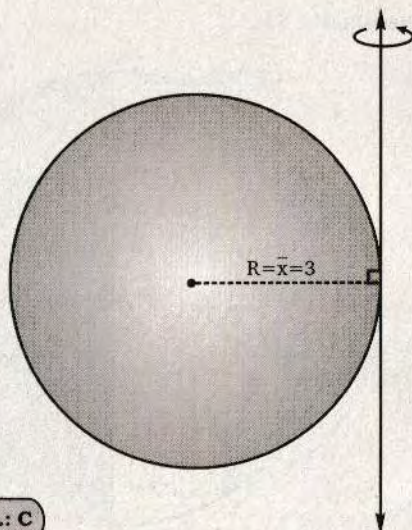
Resolución 15:

Piden: S_{SG}

Teorema de Pappus:

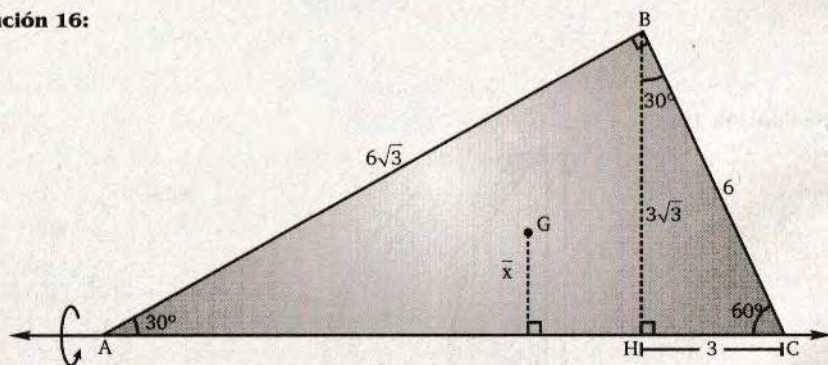
$$S_{SG} = 2\pi(3)(2\pi(3))$$

$$S_{SG} = 36\pi^2 \mu^2$$



Rpta.: C

Resolución 16:

Piden: V_{SG} $\triangle BCH$ (Notable de 30° y 60°)

$$HC = 3 \wedge BH = 3\sqrt{3}$$

Sea "G" el baricentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \text{Por Teorema: } \bar{x} = \frac{BH}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sqrt{3}$$

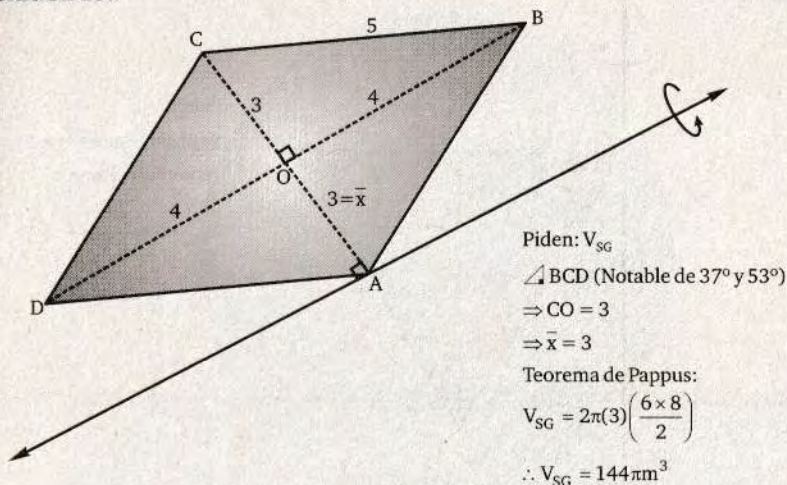
Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi(\sqrt{3}) \left(\frac{6\sqrt{3} \times 6}{2} \right)$$

$$\therefore V_{SG} = 108\pi \mu^3$$

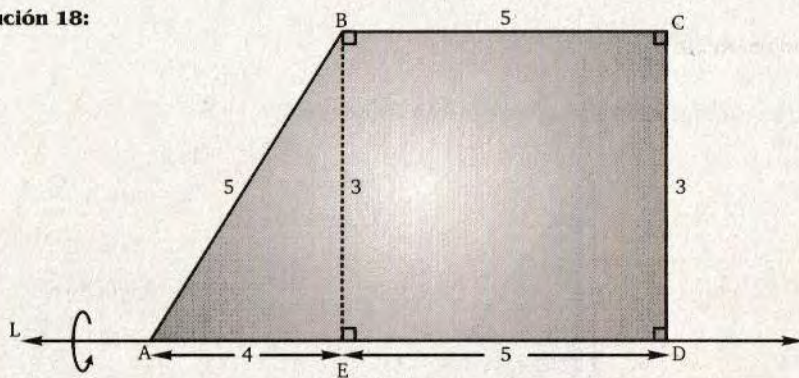
Rpta.: D

Resolución 17:



Rpta.: E

Resolución 18:



Piden: V_{SG}

$\triangle ABE$ (Notable de 37° y 53°)
 $\Rightarrow AE = 4$

Luego: $V_{SG} = V_{cono} + V_{cilindro}$

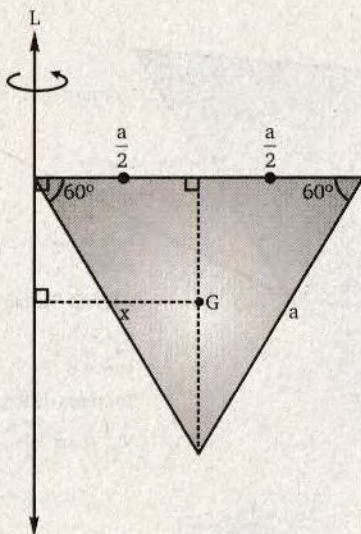
$$V_{SG} = \frac{\pi}{3}(3)^2(4) + \pi(3)^2(5)$$

$$V_{SG} = 12\pi + 45\pi$$

$$\therefore V_{SG} = 57\pi m^3$$

Rpta.: D

Resolución 19:

Piden: V_{SG} Se observa que $\bar{x} = a/2$

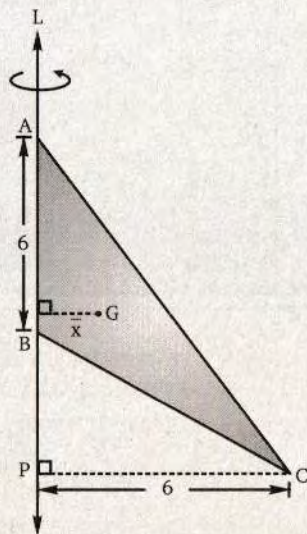
Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2\right)$$

$$\therefore V_{SG} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$$

Rpta.: D

Resolución 20:

Piden: V_{SG}

$$\text{Teorema: } \bar{x} = \frac{PC}{3} = \frac{6}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 2$$

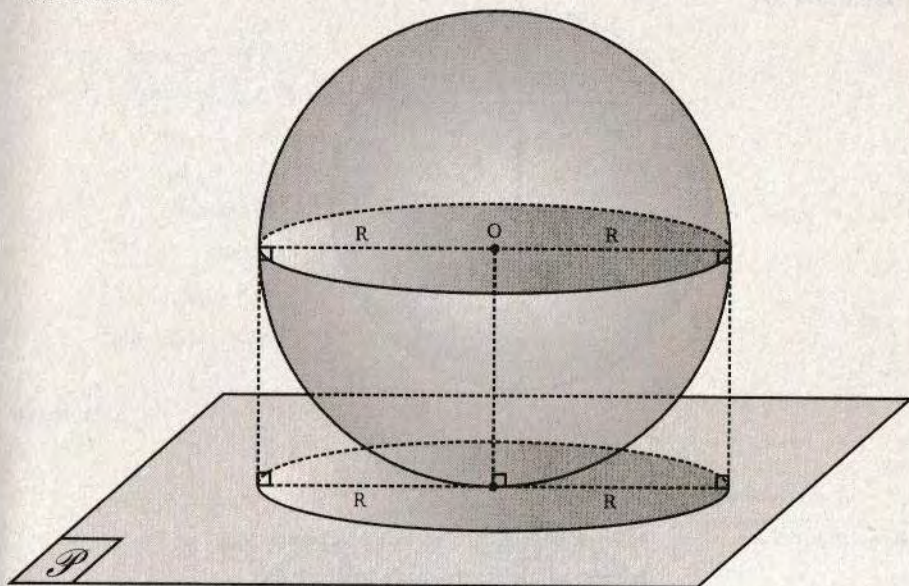
Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi(2) \left(\frac{6 \times 6}{2}\right)$$

$$\therefore V_{SG} = 72\pi \text{ cm}^3$$

Rpta.: B

Resolución 21:



Piden: S_{ESF}

La proyección ortogonal sobre el plano es equivalente al círculo máximo de la esfera.

$$\Rightarrow \text{Dato: } S_{\text{PROYECCIÓN}} = 16\pi$$

$$\pi R^2 = 12\pi$$

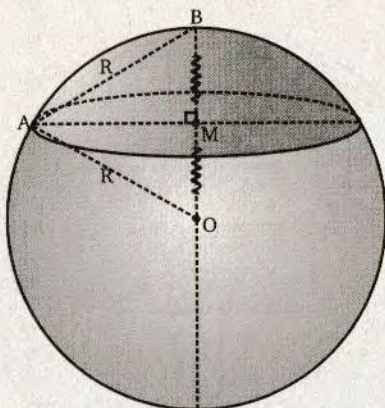
$$\Rightarrow R^2 = 12$$

$$\text{Luego: } S_{\text{ESF}} = 4\pi(12)$$

$$\therefore S_{\text{ESF}} = 48\pi \text{ m}^2$$

Rpta.: B

Resolución 22:



Piden: S_{CASQUETE}

Dato: $S_{\text{ESFERA}} = 48$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 = 48$$

$$\Rightarrow \pi R^2 = 12$$

Se sabe que:

$$S_{\text{CASQUETE}} = \pi (AB)^2$$

$$\Rightarrow S_{\text{CASQUETE}} = \pi R^2$$

$$\therefore S_{\text{CASQUETE}} = 12\mu^2$$

Rpta.: D

Resolución 23:

Piden el volumen del contenido de la pecera: V_{PEC}

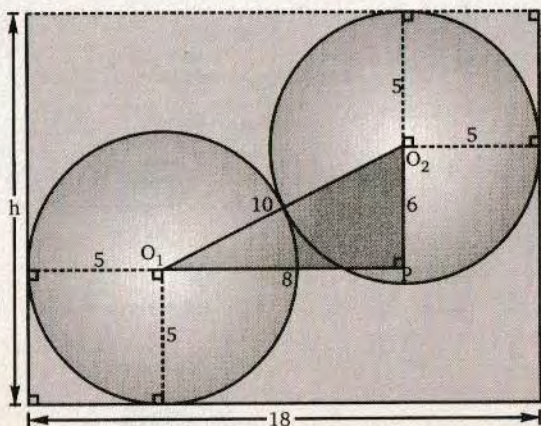
Primera calculemos el radio de cada esfera.

$$\text{Dato: } V_{\text{ESF}} = \frac{500\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\Rightarrow R = 5$$

Ahora graficamos correctamente la vista de perfil teniendo en cuenta que el ancho de la base de la pecera mide igual que el diámetro de las esferas.



$$\Rightarrow O_1P = 18 - (5 + 5)$$

$$O_1P = 8$$

$$O_2P = 6$$

$$\text{Luego } h = 5 + 6 + 5$$

$$\Rightarrow h = 16$$

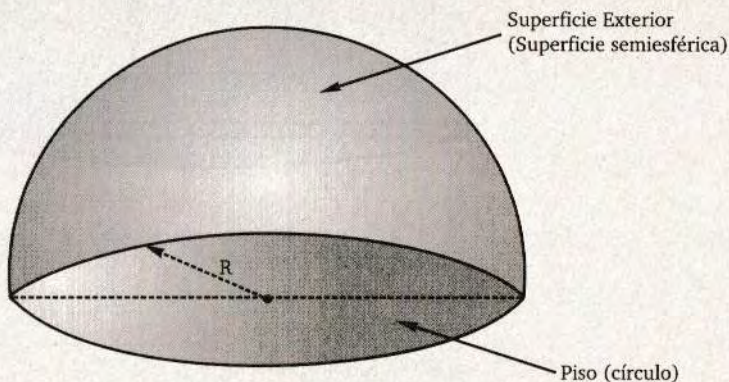
Ahora:

$$V_{PEC} = (10)(18)(16)$$

$$V_{PEC} = 2880\mu^3$$

Rpta.: B

Resolución 24:



Piden el costo "Pc" de pintar el exterior

$$\Rightarrow S_{PISO} = \pi R^2 \text{ y } S_{EXT} = \frac{1}{2}(4\pi R^2)$$

$$S_{EXT} = 2\pi R^2$$

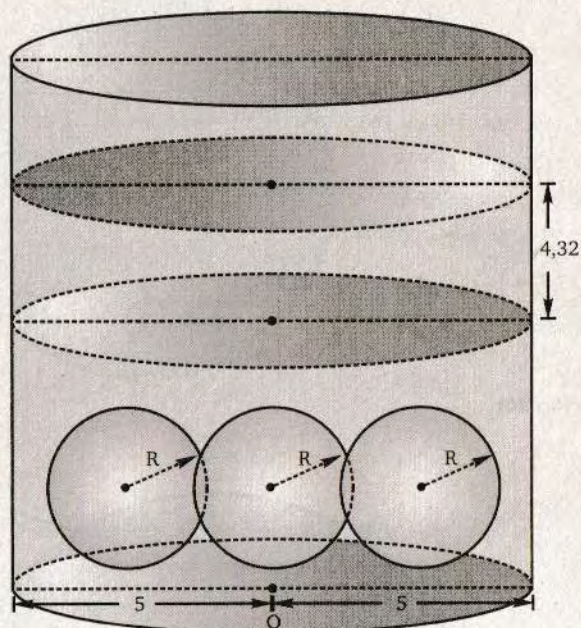
Se observa que: $S_{EXT} = 2(S_{PISO})$

$\Rightarrow$ El costo será el doble

$$\therefore P = s/. 2a$$

Rpta.: E

Resolución 25:



Piden: R (Radio de cada esfera)

Según el principio de Arquímedes el volumen desplazado será igual al volumen de las 3 esferas:

$$\pi(5)^2(4,32) = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

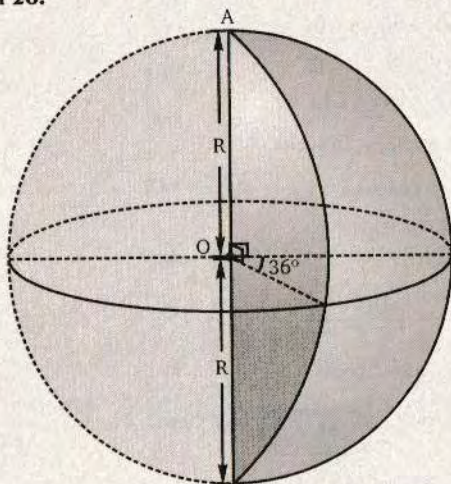
$$\frac{25 \times 4,32}{4} = R^3$$

$$27 = R^3$$

$$\therefore R = 3\text{cm}$$

Rpta.: E

Resolución 26:



Piden: $S_{\text{TOTAL DE ACUÑA}} = S_X$

Datos: $S_{\text{ESFERA}} = 400\pi$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 = 400\pi$$

$$\Rightarrow R = 10$$

$$\text{Luego: } S_X = \pi R^2 \left(1 + \frac{a}{90^\circ} \right)$$

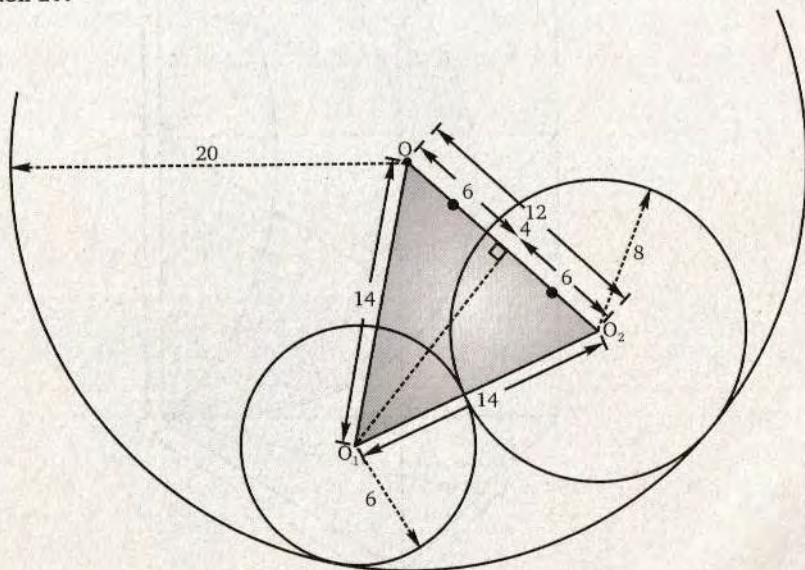
$$\Rightarrow S_X = \pi(10)^2 \left(1 + \frac{36^\circ}{90^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow S_X = \pi(100) \left(\frac{7}{5} \right)$$

$$\therefore S_X = 140\pi \text{ cm}^2$$

Rpta.: D

Resolución 27:



Piden: $S_{\Delta O_1 O_2} = S_x$

$$OO_1 = 20 - 6 = 14$$

$$OO_2 = 20 - 8 = 12$$

$$O_1 O_2 = 6 + 8 = 14$$

$\Rightarrow \Delta O O_1 O_2$: Isósceles

Teorema de Pitágoras:

$$(14)^2 = (6)^2 + (O_1 H)^2$$

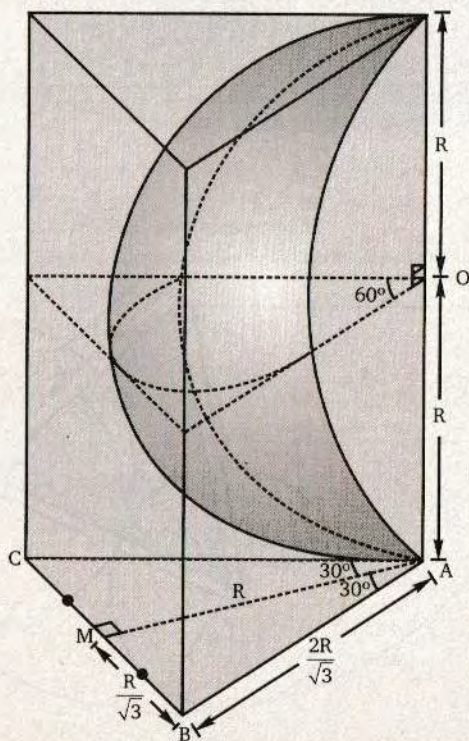
$$\Rightarrow O_1 H = 4\sqrt{10}$$

$$\text{Luego: } S_x = \frac{(12)(4\sqrt{10})}{2}$$

$$\therefore S_x = 24\sqrt{10} \text{ cm}^2$$

Rpta.: A

Resolución 28:



Piden: $V_{\text{CUÑA}}$

$\triangle ABM$ (Notable de 30° y 60°)

$$\begin{cases} AM = R \\ MB = \frac{R}{\sqrt{3}} \\ AB = \frac{2R}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Dato: $V_{\text{PRISMA}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 (2R) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

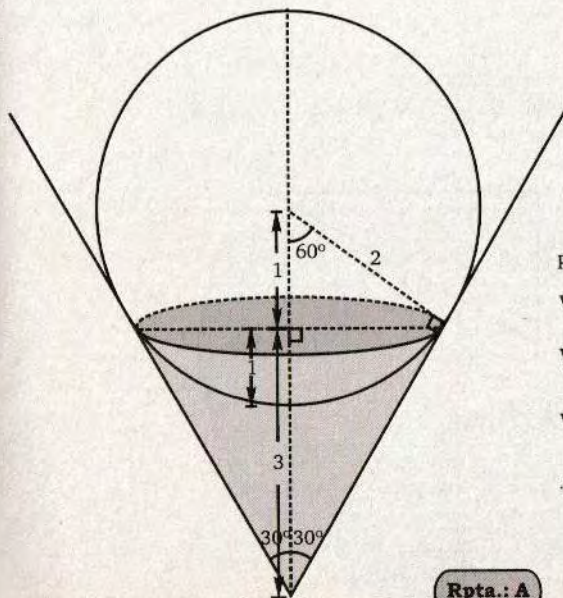
$$\Rightarrow R^3 = 1$$

Luego: $V_{\text{CUÑA}} = \pi (1) \left(\frac{60^\circ}{270^\circ}\right)$

$$\therefore V_{\text{CUÑA}} = \frac{2\pi}{9} \text{ m}^3$$

Rpta.: E

Resolución 29:



Piden:

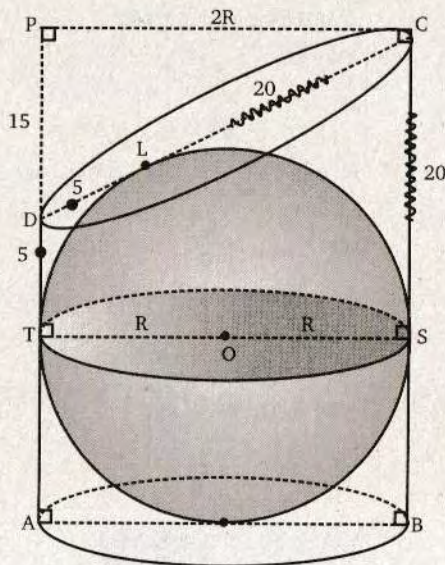
$$V_X = V_{\text{CONO}} - V_{\text{SEGMENTO ESFERICO}}$$

$$V_X = \left[\frac{\pi}{3} (\sqrt{3})^2 (3) \right] - \left[\frac{\pi}{6} (1)^3 + \frac{\pi}{2} (1) (\sqrt{3})^2 \right]$$

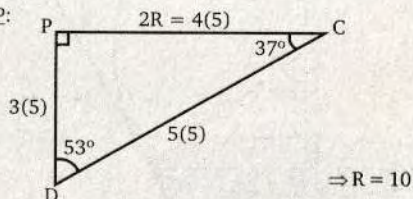
$$V_X = 3\pi - \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore V_X = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Rpta.: A



 CDP:



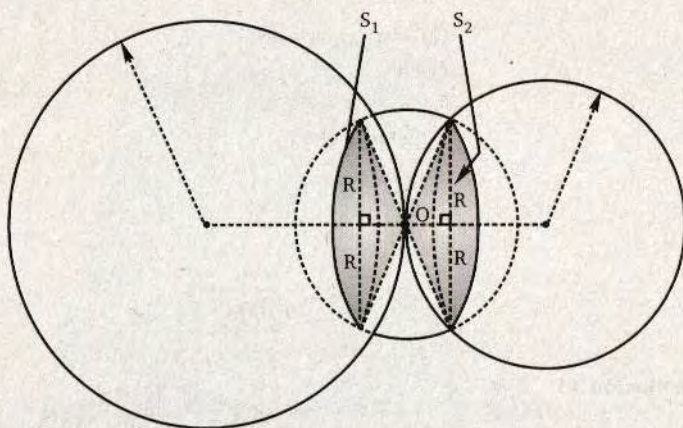
Luego:

$$V_{\text{ESF}} = \frac{4\pi}{3}(10)^3$$

$$\therefore V_{\text{ESF}} = \frac{4000}{3} \pi \text{cm}^3$$

Rpta.: B

Resolución 31:



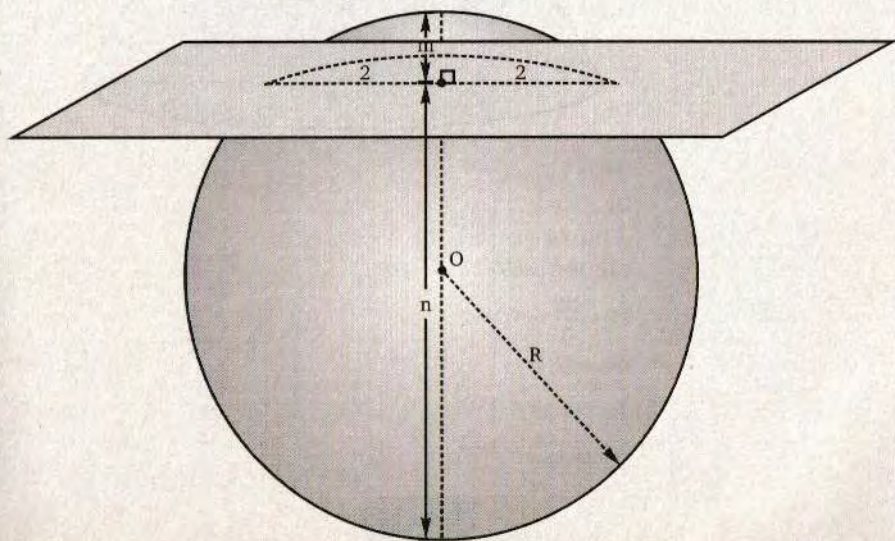
Piden:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2} = 1$$

∴ La relación es 1:1

Rpta.: E

Resolución 32:



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 12

Por relación métrica:

$$(2)^2 = mn \Rightarrow mn = 4$$

Piden:

$$S_{\text{CASQUETE}(1)} \times S_{\text{CASQUETE}(2)}$$

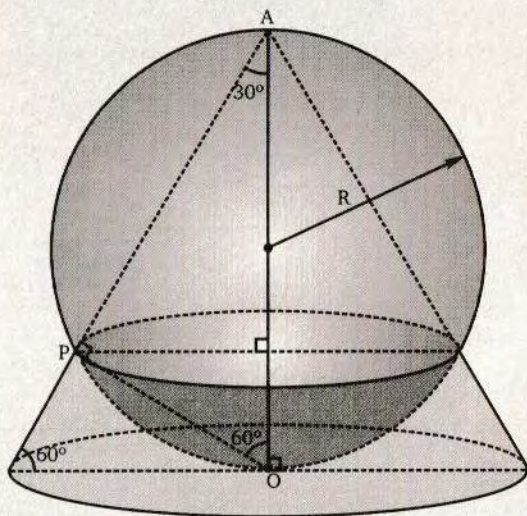
$$= (2\pi Rm) \times (2\pi Rn)$$

$$= 4\pi^2 R^2 \underbrace{(mn)}_4$$

$$= 16\pi^2 R^2$$

Rpta.: A

Resolución 33:

Piden: S_{CASQUETE} Dato: $R = 2$

$$\Rightarrow OB = 4$$

 $\angle BOP$ (Notable de 30° y 60°):

$$PO = \frac{OB}{2} \Rightarrow PO = 2$$

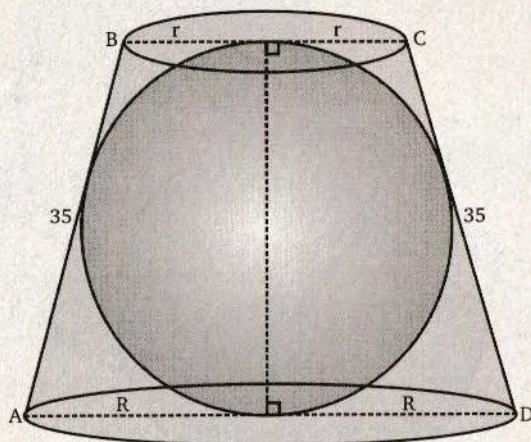
Teorema:

$$S_{\text{CASQUETE}} = \pi (PO)^2$$

$$\therefore S_{\text{CASQUETE}} = 4\pi u^2$$

Rpta.: D

Resolución 34:



Piden: $S_{T-\text{CONO}}$

$\triangle ABCD$ (Teorema de Pitot)

$$2R + 2r = 35 + 35$$

$$\Rightarrow R + r = 35$$

Luego:

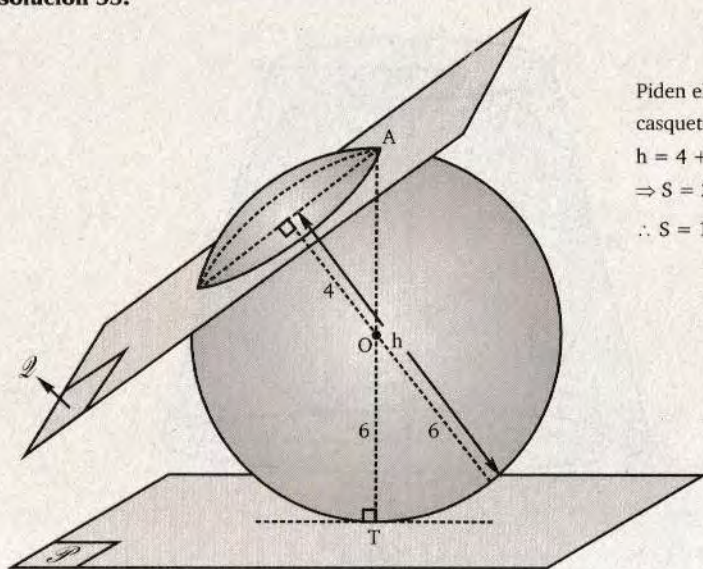
$$S_{T-\text{CONO}} = \pi g(R + r)$$

$$S_{T-\text{CONO}} = \pi(35)(35)$$

$$\therefore S_{T-\text{CONO}} = 1225\pi u^2$$

Rpta.: B

Resolución 35:



Piden el área del mayor
casquete esférico "S":

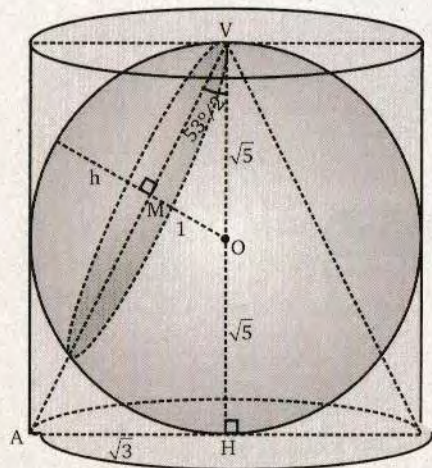
$$h = 4 + 6 \Rightarrow h = 10$$

$$\Rightarrow S = 2\pi (6)(10)$$

$$\therefore S = 120\pi u^2$$

Rpta.: D

Resolución 36:



Piden: S_{CASQUETE}

$\angle AHV$ y $\angle OMV$ (Notables de $53^\circ/2$)

$$\Rightarrow OM = 1$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{5} - 1$$

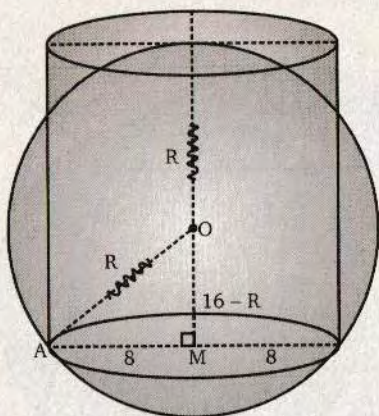
Luego:

$$S_{\text{CASQUETE}} = 2\pi(\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)$$

$$\therefore S_{\text{CASQUETE}} = 2\pi(5 - \sqrt{5})u^2$$

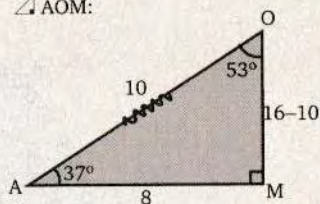
Rpta.: E

Resolución 37:



Piden: V_{ESF}

$\triangle AOM$:



$$\Rightarrow R = 10$$

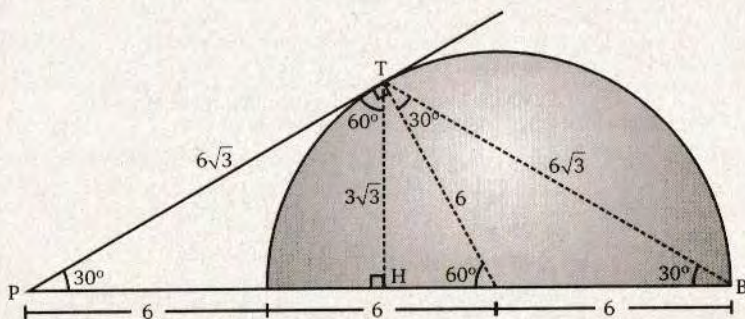
Luego:

$$V_{ESF} = \frac{4}{3} \pi (10)^3$$

$$\therefore V_{ESF} = \frac{4000\pi}{3} u^3$$

Rpta.: D

Resolución 38:



Piden: $S_{SG} = S_{LATERAL} + S_{CASQUETE}$
DE UN CONO

$\triangle PTO$ (Notable de 30° y 60°)

$$\Rightarrow PT = 6\sqrt{3} \quad \wedge \quad TH = 3\sqrt{3}$$

Además ($\triangle OTB$: Isósceles de 30° y 120°):

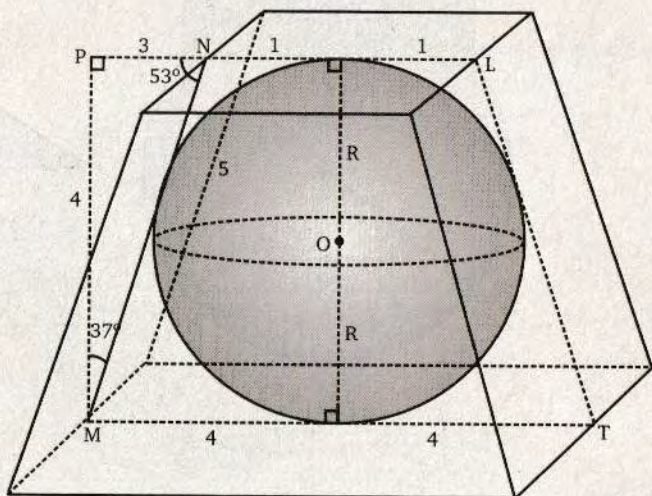
$$TB = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Luego: } S_{SG} = \pi(3\sqrt{3})(6\sqrt{3}) + \pi(6\sqrt{3})^2$$

$$\therefore S_{SG} = 162\pi m^2$$

Rpta.: A

Resolución 39:



Piden: S_{ESF}

$\triangle MNLT$: Trapecio Isósceles circunscriptible: $MN = LT$

Teorema de Pitot:

$$MN + \overline{LT} = 2 + 8$$

$$\Rightarrow MN = 5$$

$\triangle MPN$: (Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow PM = 2R = 4$$

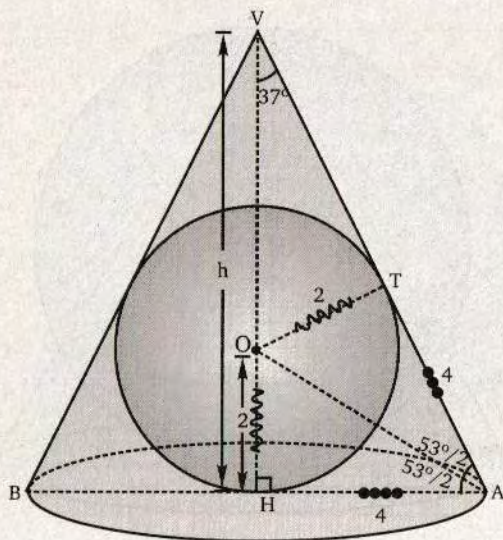
$$\Rightarrow R = 2$$

$$\text{Luego: } S_{ESF} = 4\pi(2)^2$$

$$\therefore S_{ESF} = 16\pi m^2$$

Rpta.: A

Resolución 41:

Piden: V_{CONO} $\triangle AOH$ (Notable de $53^\circ/2$) $\Rightarrow m\angle HAT = 53^\circ$ $\triangle AHV$ (Notable de 37° y 53°)

$$\tan 53^\circ = \frac{h}{4} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{16}{3}$$

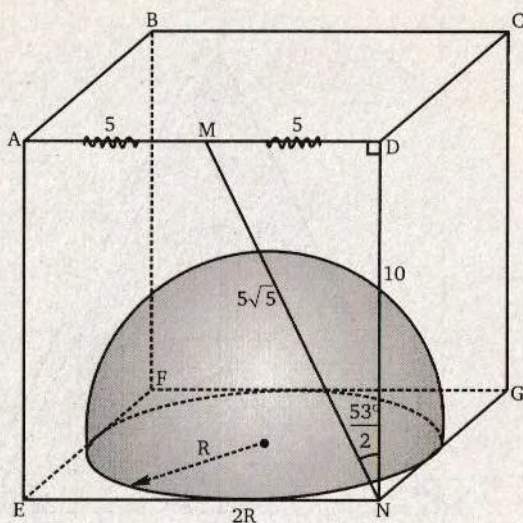
Luego:

$$V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} (4)^2 \left(\frac{16}{3} \right)$$

$$\therefore V_{\text{CONO}} = \frac{256}{9} \pi \text{ cm}^3$$

Rpta.: D

Resolución 42:



$$\text{Piden: } S_{\text{TOTALDESEMIESFERA}} = S_X$$

$$\triangle MDN \text{ (Notable de } \frac{53^\circ}{2})$$

$$\Rightarrow MD = 5 \quad \wedge \quad DN = 10$$

$$\Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$

$$\text{Luego: } S_X = \frac{4\pi R^2}{2} + \pi R^2$$

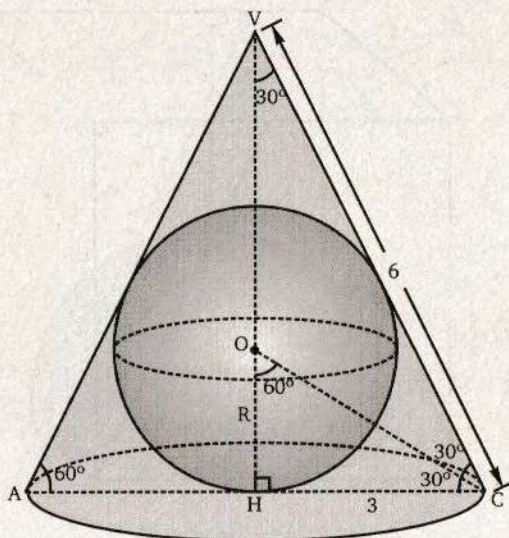
$$\Rightarrow S_X = 3\pi R^2$$

$$\Rightarrow S_X = 3\pi(5)^2$$

$$\Rightarrow S_X = 75\pi \text{ m}^2$$

Rpta.: B

Resolución 43:

Piden: V_{ESF} $\triangle CHV$ (Notable de 30° y 60°)

$$VC = 6 \Rightarrow HC = 3$$

 $\triangle COH$ (Notable de 30° y 60°):

$$R\sqrt{3} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

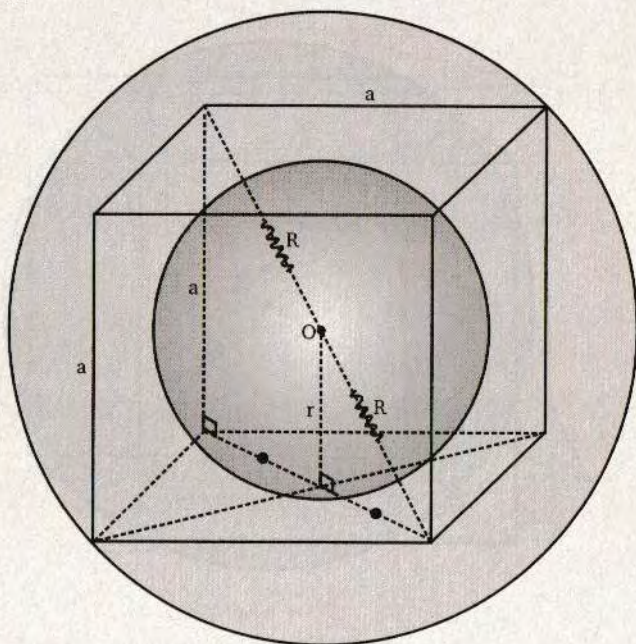
Luego:

$$V_{ESF} = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$$

$$\therefore V_{ESF} = 4\sqrt{3}\pi m^3$$

Rpta.: D

Resolución 44:



$$\text{Piden: } \mu = \frac{S_{\text{ESF. INS.}}}{S_{\text{ESF. CIR.}}}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Del gráfico:

$r = a/2$ y se sabe que la diagonal del cubo tiene longitud: $a\sqrt{3}$

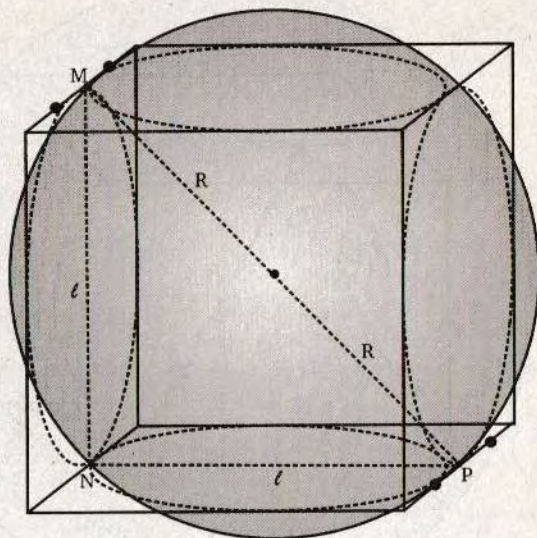
$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Luego: } \mu = \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{3}$$

Rpta.: B

Resolución 45:



Piden: S_{ESF}

La esfera es tangente en el punto medio de cada arista.

$\triangle MNP$ (Notable de 45°)

$$2R = \ell\sqrt{2}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

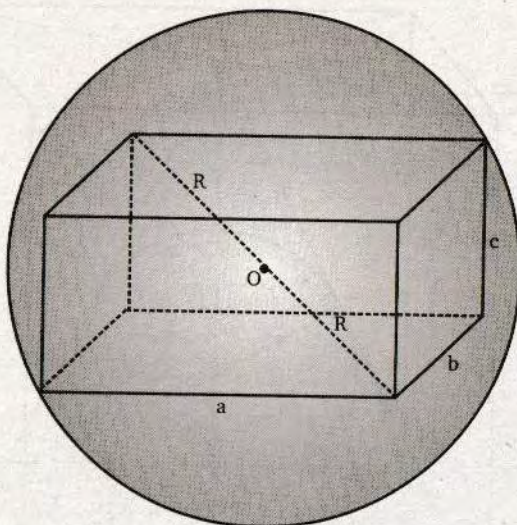
Luego:

$$S_{\text{ESF}} = 4\pi \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\therefore S_{\text{ESF}} = 2\pi\ell^2$$

Rpta.: B

Resolución 47:



Piden el volumen máximo del paralelepípedo: V_{MAX}

Se sabe que:

$$(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \dots(I)$$

Por diferencia de medias:

$$MG \leq MA$$

$$\sqrt[3]{(a^2)(b^2)(c^2)} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \leq \frac{4R^2}{3} \quad \dots(\text{De(I)})$$

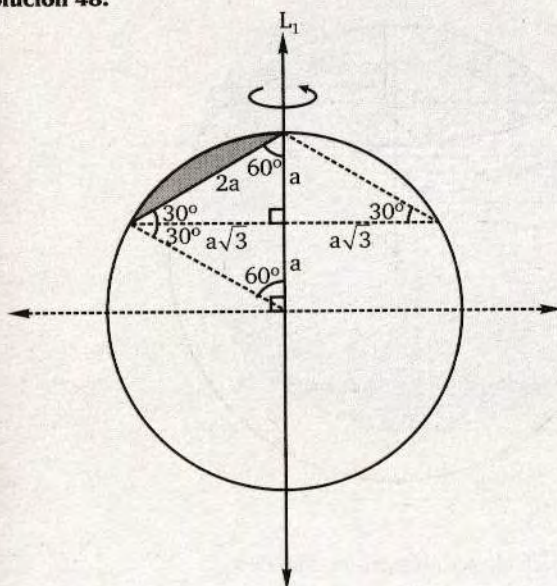
$$abc \leq \left(\sqrt{\frac{4R^2}{3}} \right)^3$$

$$V_{\text{PARAP}} \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3$$

$$\therefore V_{\text{MAX}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3$$

Rpta.: A

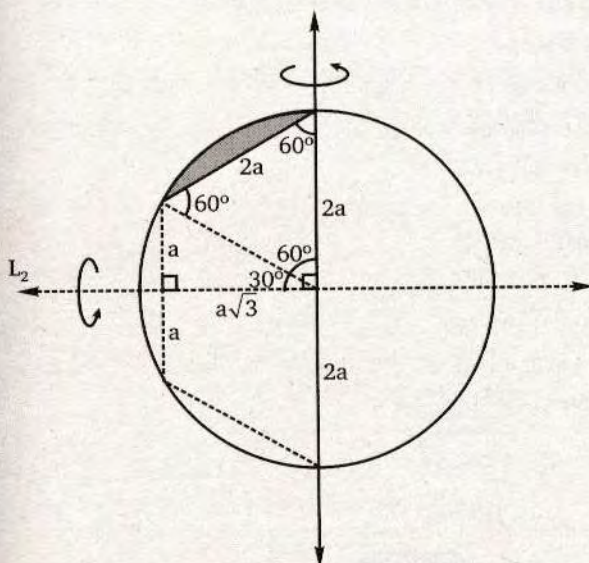
Resolución 48:



Para L_1 :

$$V_1 = \frac{1}{6} \pi (2a)^2 (a)$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3} \pi a^3$$



Para L_2 :

$$V_2 = \frac{1}{6} \pi (2a)^2 (a\sqrt{3})$$

$$V_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi a^3$$

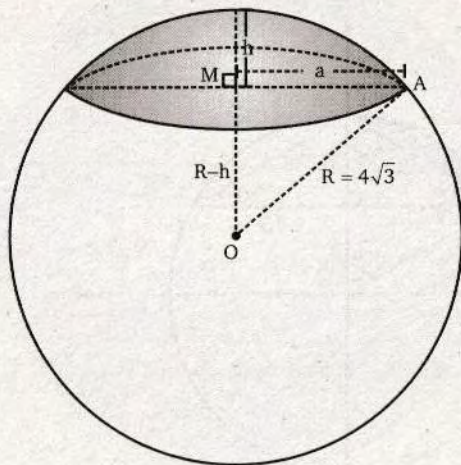
Luego piden:

$$\mu = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{3} \pi a^3}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi a^3}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Rpta.: C

Resolución 49:



Piden el volumen del segmento esférico: V_{SEG}

$$\text{Dato: } S_{\text{CASQUETE}} = 4S_{\text{BASE}}$$

$$\Rightarrow 2\pi Rh = 4(\pi a^2)$$

$$4\sqrt{3} \cdot h = 2a^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}h = a^2 \quad \dots \text{(I)}$$

$\triangle OMA$ (Teorema de Pitágoras)

$$R^2 = (R-h)^2 + a^2$$

$$\Rightarrow h(2R-h) = a^2 \quad \dots \text{(II)}$$

(I) en (II):

$$h(2R-h) = 2\sqrt{3}h$$

$$\Rightarrow 2(4\sqrt{3}) - h = 2\sqrt{3}$$

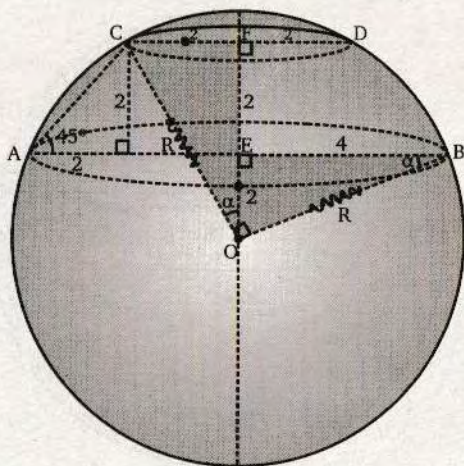
$$\Rightarrow h = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

$$\text{Luego: } V_{\text{SEG}} = \frac{\pi}{6}h^3 + \frac{\pi}{2}ha^2$$

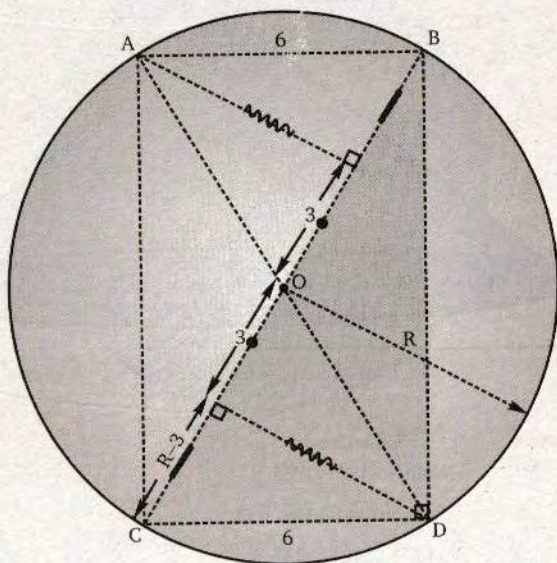
$$V_{\text{SEG}} = \frac{\pi}{6}(6\sqrt{3})^3 + \frac{\pi}{2}(6\sqrt{3})(6)^2$$

$$\therefore V = 216\sqrt{3}\pi \mu^3$$

Rpta.: B


$$\therefore S_{\text{ZONA}} = 8\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$$

Rpta.: C



△ BDC (Relación Métrica)

$$36 = 2R(R - 3)$$

$$18 = R(R-3)$$

$$18 = \underset{\substack{\downarrow \\ (6)}}{R}(\underbrace{R-3}_{(3)})$$

$$\Rightarrow R = 6$$

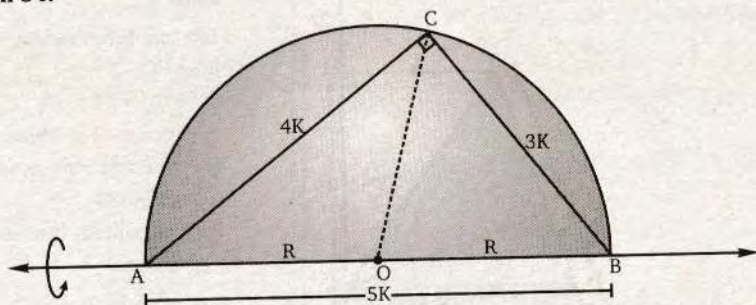
Luego:

$$S_{\text{ESFERA}} = 4\pi(6)^2$$

$$\therefore S_{\text{ESFERA}} = 144 \pi \text{ m}^2$$

Rpta.: A

Resolución 54:



Piden: $S_{SG} = S_{SEMIESFERA}$

Datos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{4}{3} \text{ y } AC + CB = 28$$

$$\Rightarrow \angle ACB \text{ (Notable de } 37^\circ \text{ y } 53^\circ): AB = 5K = 2R$$

$$\text{Del dato: } 4K + 3R = 28 \Rightarrow K = 4$$

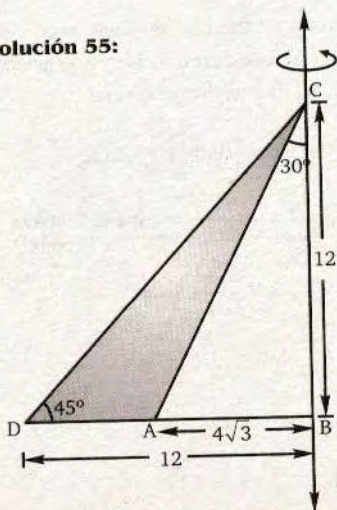
$$\Rightarrow 2R = 5(4) \Rightarrow R = 10$$

$$\Rightarrow S_{SG} = 4\pi(10)^2$$

$$\therefore S_{SG} = 400\pi \text{ cm}^2$$

Rpta.: C

Resolución 55:



Piden: V_{SG}

$$\angle ABC \text{ (Notable de } 30^\circ \text{ y } 60^\circ):$$

$$BC = 4\sqrt{3}(\sqrt{3}) \Rightarrow BC = 12$$

$$\angle DBC \text{ (Notable de } 45^\circ):$$

$$DB = BC = 12$$

Luego (diferencia de volúmenes de conos):

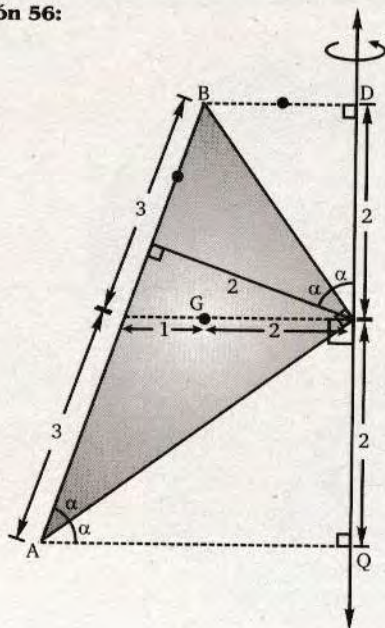
$$V_{SG} = \frac{\pi}{3}(12)^2(12) - \frac{\pi}{3}(4\sqrt{3})^2(12)$$

$$V_{SG} = 4\pi(144 - 48)$$

$$\therefore V_{SG} = 384\pi \text{ cm}^3$$

Rpta.: C

Resolución 56:

Piden: V_{SG}

Teorema de la bisectriz

$$PC = HC = 2$$

$$CQ = CH = 2$$

$\Rightarrow$ El centro de gravedad del $\triangle ABC$ se encuentra en la mediana del trapecio ABPQ

Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$CM = \frac{6}{3} \Rightarrow CM = 3$$

$$\Rightarrow MG = 1 \wedge GC = \bar{X} = 2$$

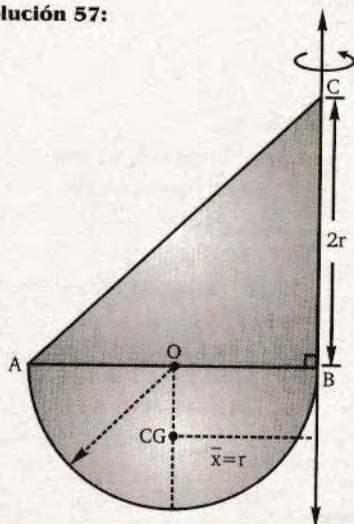
Luego:

$$V_{SG} = 2\pi(2)\left(\frac{6 \times 2}{2}\right)$$

$$\therefore V_{SG} = 4\pi m^3$$

Rpta.: A

Resolución 57:



El volumen generado será el de un cono de revolución y el generado por la semicircunferencia:

$$V = \frac{\pi}{3}(2r)^2(2r) + 2\pi(r)\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$$

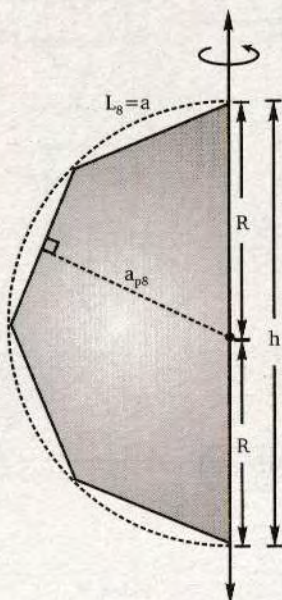
Por el Teorema de Pappus

$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^3}{2} \cdot 8 + \pi r^3$$

$$\therefore V = \frac{\pi r^3}{3}(8 + 3\pi)$$

Rpta.: B

Resolución 60:

Piden: V_{SG}

Teorema de Arquímedes:

$$V_{SG} = \frac{2}{3} \pi (a_p)^2 \cdot h$$

Se sabe que:

$$\begin{cases} L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = a \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ a_{ps} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{SG} = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 (2R)$$

$$\Rightarrow V_{SG} = \frac{\pi}{3} (2+\sqrt{2}) R^3$$

$$\Rightarrow V_{SG} = \frac{\pi}{3} (2+\sqrt{2}) \left(\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right)^3$$

$$V_{SG} = \frac{\pi}{3} (2+\sqrt{2}) \frac{a^3}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2-\sqrt{2}})}$$

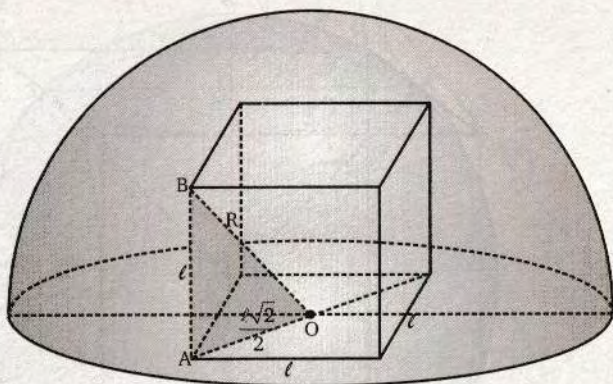
$$V_{SG} = \frac{\pi}{3} \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$V_{SG} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\therefore V_{SG} = \frac{\pi a^3 (\sqrt{2}+1)^2}{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Rpta.: C

Resolución 61:

Piden: $V_{\text{semiesfera}}$ $\triangle OAB$ (Teorema de Pitágoras)

$$R^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$$

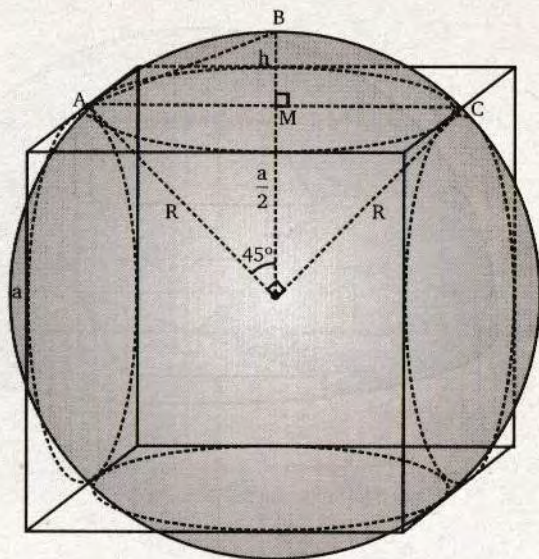
Luego:

$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{\ell\sqrt{6}}{2} \right)^3 \right]$$

$$\therefore V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{\sqrt{6}\pi\ell^3}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 62:



Piden el área de 6 casquetes esféricos, "GS"

Se observa que:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

También:

$$h = R - \frac{a}{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$h = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

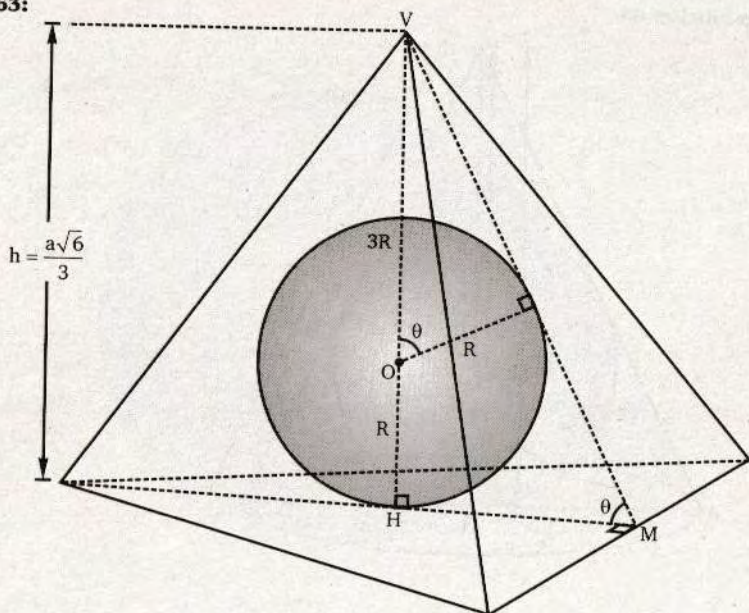
Luego:

$$GS = 6 \left[2\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1) \right]$$

$$\therefore GS = 3\sqrt{2}\pi(\sqrt{2} - 1)a^2$$

Rpta.: C

Resolución 63:



Piden: V_{ESFERA}

Se sabe que:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow OV = 3R$$

$$\Rightarrow 3R + R = h$$

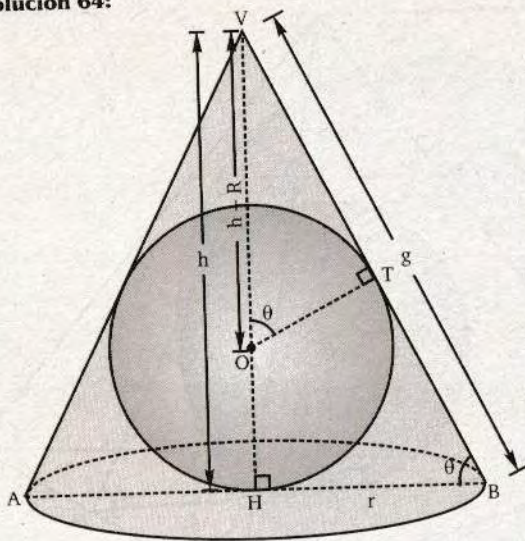
$$4R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Luego: } V_{\text{ESF}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^3$$

$$\therefore V_{\text{ESF}} = \frac{a^3\sqrt{6}\pi}{216}$$

Rpta.: A



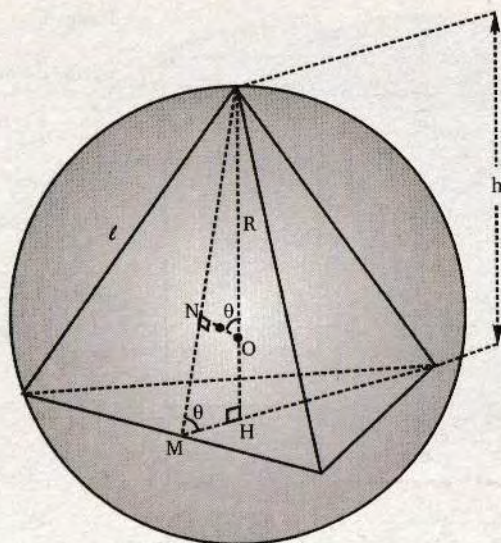
$$\mu = \frac{2Rr(g+r)}{8R^3}$$

$$(III)_{en}(II): \mu = \frac{2rh}{rh}$$

$$\therefore \mu = 2$$

Rpta.: E

Resolución 65:



Piden: $V_{\text{TETRAEDRO}} = V$

Sabemos que:

$$\arccos(\theta) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow ON = OH = \frac{R}{3}$$

$$\Rightarrow h = R + \frac{R}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell\sqrt{6}}{3} = \frac{4R}{3}$$

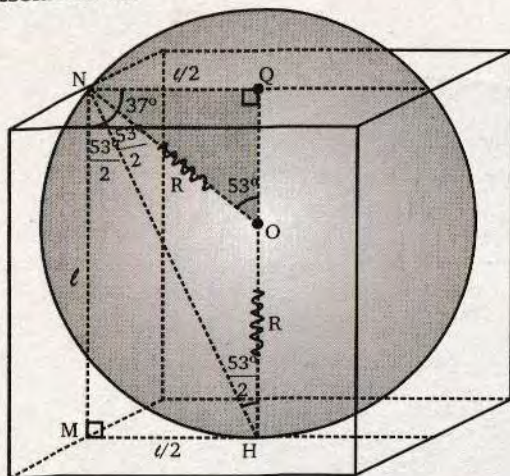
$$\Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

Luego: $V_T = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$

$$V_T = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\therefore V_T = \frac{8\ell^3\sqrt{3}}{27}$$

Rpta.: D

Piden: S_{ESP}

$$\angle NMH \left(\text{Notable de } \frac{53^\circ}{2} \right)$$

$$\Rightarrow m\angle NHO = m\angle HNO = \frac{53^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle NOQ = 53^\circ$$

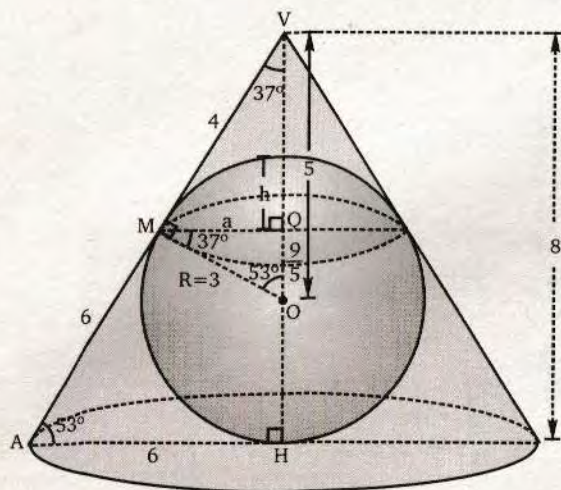
$\Rightarrow \triangle NOQ$ (Notable de 37° y 53°):

$$\cos 37^\circ = \frac{4}{5} = \frac{\ell}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{5\ell}{8}$$

$$\text{Luego: } S_{\text{ESF}} = 4\pi \cdot \left(\frac{5\ell}{8}\right)^2$$

$$\therefore S = \frac{25\pi\ell^2}{16}$$

Resolución 67:

Piden:

$\triangle$ AHV y $\triangle$ OMV

(Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow AV=10 \Rightarrow MV=4 \wedge MO=R=3 \wedge$$

$$OV = 5$$

△ OMV (Relación Métrica):

$$(3)(4) = (5)(a)$$

$$\Rightarrow a = \frac{12}{5} \Rightarrow OQ = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow h = 3 - \frac{9}{5} \Rightarrow h = \frac{6}{5}$$

Luego:

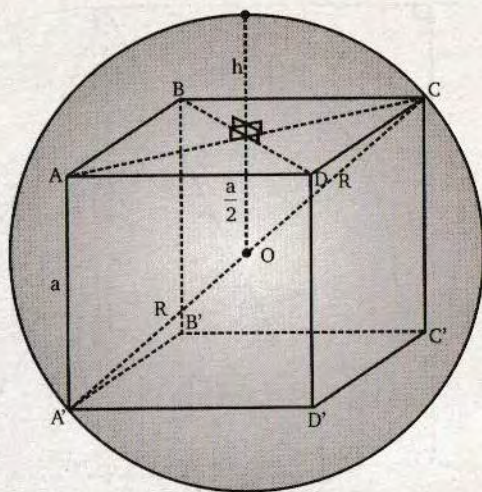
$$V_{\text{SEG.}} = \frac{\pi}{6} h^3 + \frac{\pi}{2} h a^2$$

$$\Rightarrow V_{\text{SEG.}} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{6}{5} \right)^3 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{6}{5} \right) \left(\frac{12}{5} \right)^2$$

$$\therefore V_{\text{SEG.}} = \frac{468\pi}{125} \mu^3$$

Rpta.: D

Resolución 68:



Las 4 superficies pequeñas son casquetes esféricos de área " S_1 ".

Las 2 superficies medianas son zonas esféricas de dos bases de área " S_2 ".

Entonces:

$$S_1 = 2\pi Rh$$

$$S_2 = 2\pi Ra$$

Piden:

$$E = 4S_1 - 2S_2$$

$$E = 8\pi Rh - 4\pi Ra$$

$$E = 4\pi R(2h - a) \quad \dots (I)$$

Del gráfico:

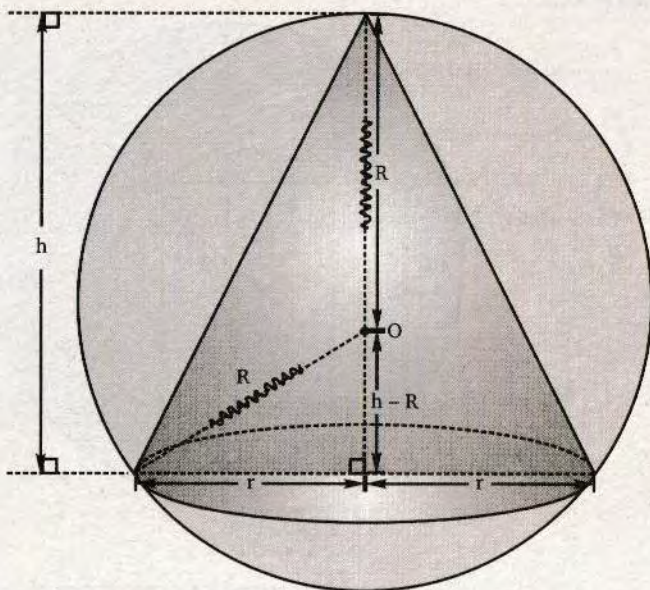
$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad h = R - a = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\Rightarrow E = 4\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left(2 \cdot \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) - a \right)$$

$$\therefore E = 2\pi a^2(3 - 2\sqrt{3})$$

Rpta.: B

Resolución 69:



Piden "h" si el V_{CONO} es máximo.

Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + (h - R)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2$$

$$\Rightarrow V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} (2Rh - h^2) \cdot h$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} h^2 (2R - h)$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot \underbrace{\left[\frac{hh}{2} \cdot \frac{(2R - h)}{2} \right]}_f$$

El volumen será máximo cuando f es máximo

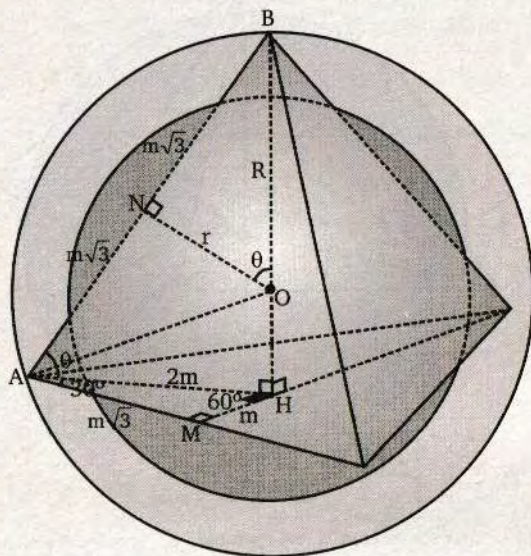
$$\text{Además como } \left(\frac{h}{2} \right) + \left(\frac{h}{2} \right) + (2R - h) = 2R \text{ (constante)} \Rightarrow f$$

$$\text{Será máximo cuando } \frac{h}{2} = \frac{h}{2} = 2R - h$$

$$\therefore h = \frac{4R}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 70:



Piden el volumen de la esfera de radio r : V_x

$$\text{Dato: } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Obs: Las esferas son concéntricas

$\triangle AHM$ (Notable de 30° y 60°)

$\triangle BON \sim \triangle BAH$:

$$\cos \theta = \frac{r}{R} = \frac{2m}{2m\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

Luego

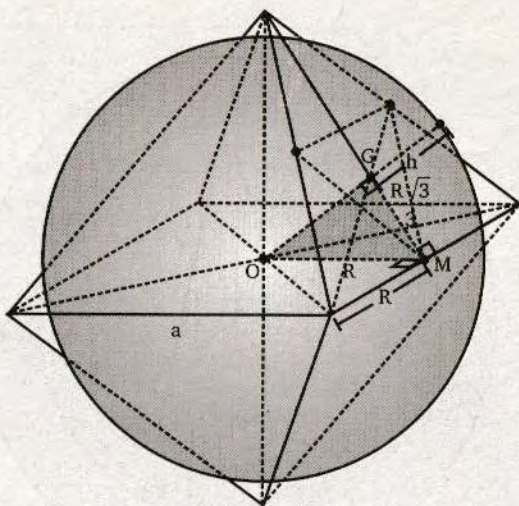
$$V_x = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} R \right)^3$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore V_x = \left(\frac{\sqrt{3}}{9} \right) V$$

Rpta.: D

Resolución 71:



Piden el área "S" del casquete

Se observa que $a = 2R \Rightarrow$ por dado $R = \frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{2}$

La esfera es tangente en cada punto medio de las aristas del octaedro regular.

La circunferencia determinada por el casquete tendrá centro en el baricentro de la cara correspondiente del octaedro.

$\triangle OGM$ (Teorema de Pitágoras):

$$(OG)^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow h = R - \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{R\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow h = \frac{R}{3}(3 - \sqrt{6})$$

$$\text{Luego: } S = 2\pi R \cdot \frac{R}{3}(3 - \sqrt{6})$$

$$S = \frac{2}{3}\pi R^2(3 - \sqrt{6})$$

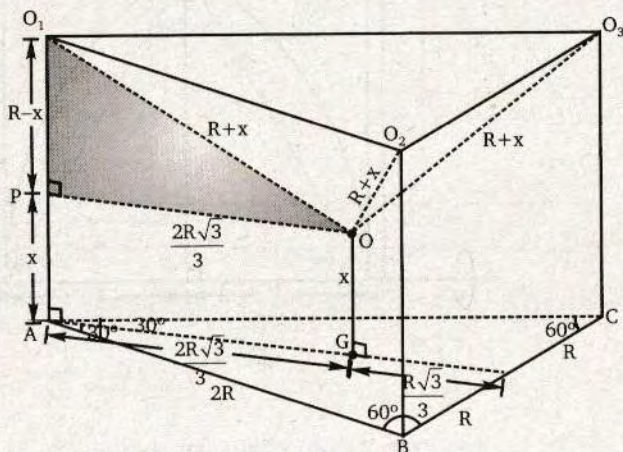
$$S = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{2}\right)^2 (3 - \sqrt{6})$$

$$\therefore S = \frac{\pi}{2}\mu^2$$

Rpta.: C

Resolución 72:

Los centros de las 3 esferas congruentes y sus proyecciones ortogonales sobre el plano forman un prisma triangular regular.



El centro de la cuarta esfera se proyecta sobre el baricentro del $\triangle ABC$.

$\triangle O_1PO$ (Teorema de Pitágoras)

$$(R+x)^2 = (R-x)^2 + \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

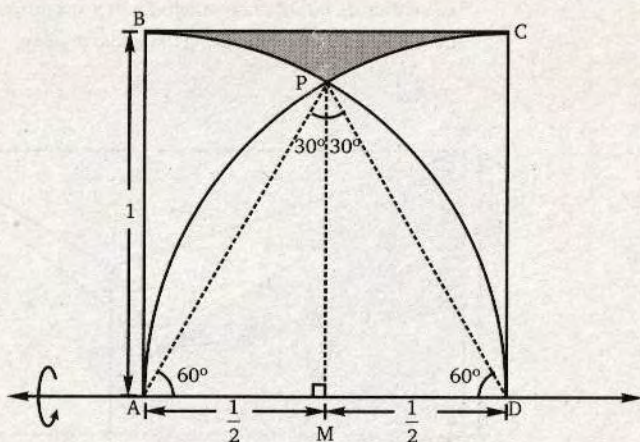
$$(R+x)^2 - (R-x)^2 = \frac{4R^2}{3}$$

$$4Rx = \frac{4R^2}{3}$$

$$\therefore x = \frac{R}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 73:



$$V_X = V_{\text{CILINDRO}} - 2V_{\text{SEGMENTO ESFÉRICO}}$$

$$V_X = \pi(1)^2(1) - 2 \left[\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) \right]$$

$$V_X = \pi - \left[\frac{\pi}{24} + \frac{7\pi}{8} \right]$$

$$V_X = \pi - \frac{22\pi}{24} = \pi - \frac{11\pi}{12}$$

$$\therefore V_X = \frac{\pi}{12} \mu^3$$

Rpta.: C

Piden V_G

$$\text{Dato: } (AC)(AH - HC)^2 = 36$$

$$\Rightarrow d(h + m - m)^2 = 36$$

$$\Rightarrow dh^2 = 36 \dots\dots (I)$$

$\triangle ABC$ (Relación métrica)

$$a^2 = dh \dots\dots (II)$$

Por el teorema del volumen del anillo esférico:

$$V_G = \frac{\pi}{6} a^2 h$$

$$\text{De (II): } V_G = \frac{\pi}{6} (dh) h$$

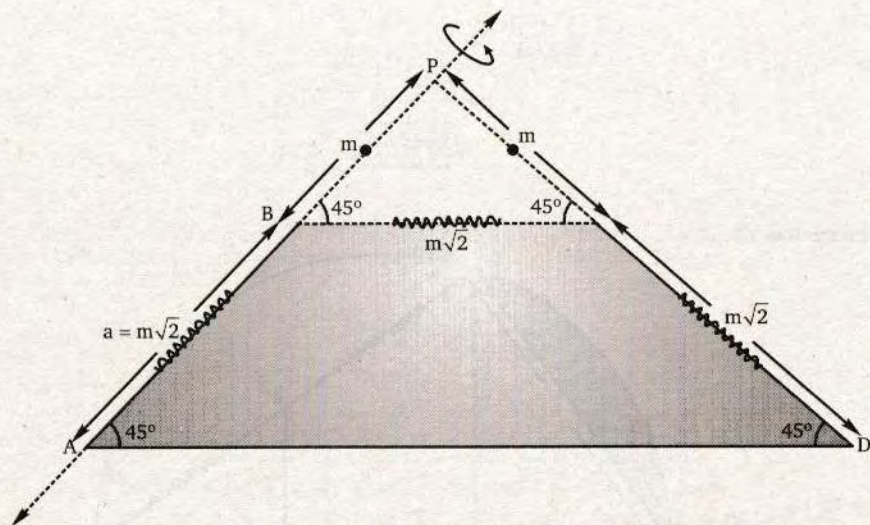
$$\Rightarrow V_G = \frac{\pi}{6} dh^2$$

$$\text{De (I): } V_G = \frac{\pi}{6} (36)$$

$$\therefore V_G = 6\pi \mu^3$$

Rpta.: C

Resolución 76:



Piden V_G

Dato: $m\angle ABC = 3m\angle ADC \Rightarrow m\angle ADC = 45^\circ \wedge m\angle ABC = 135^\circ$

$$\text{Sea } a = m\sqrt{2} \Rightarrow m = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

El volumen generado es la diferencia de volúmenes de 2 conos de revolución:

$$V_G = \frac{\pi}{3}(m\sqrt{2} + m)^2(m\sqrt{2} + m) - \frac{\pi}{3}(m^2)(m)$$

$$V_G = \frac{\pi}{3}m^3[(\sqrt{2} + 1)^3 - 1]$$

$$V_G = \frac{\pi}{3}\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{4}\right)[5\sqrt{2} + 6]$$

$$\therefore V_G = \frac{\pi a^3(5 + 3\sqrt{2})}{6}$$

Rpta.: A

Resolución 77:

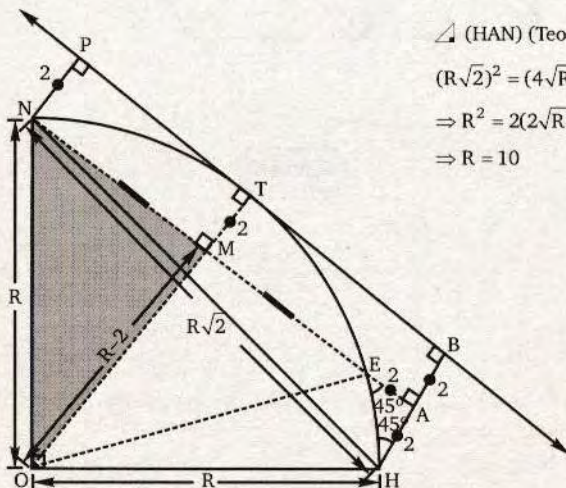
Primero calculamos el radio de la circunferencia

Trazamos $\overline{NA} // \overline{PB}$ ($A \in \overline{HB}$) $\Rightarrow HA = AB = MT = NP = 2$

$\triangle HEA$ (Notable de 45°) $EA = AH = 2$

$\triangle OMN$ (Teorema de Pitágoras): $R^2 = (R - 2)^2 + (MN)^2$

$$\Rightarrow MN = 2\sqrt{R - 1}$$



$\triangle (HAN)$ (Teorema de Pitágoras):

$$(R\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{R - 1} + 2)^2 + (2)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 2(2\sqrt{R - 1} + 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow R = 10$$

Entonces: graficamos de acuerdo al enunciado

Se observa los trapezios (ONPT), (OHBT) y (HNPB)

Calculamos la longitud de la mediana para cada uno de ellos:

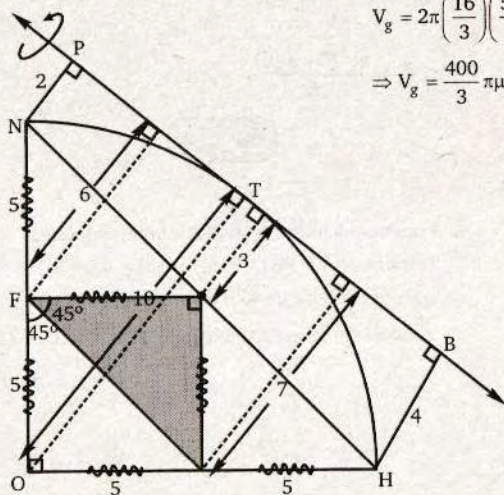
$$\begin{cases} FL = 6 \\ GQ = 7 \\ SK = 3 \end{cases}$$

Teorema: $\bar{x} = \frac{6+7+3}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{16}{3}$

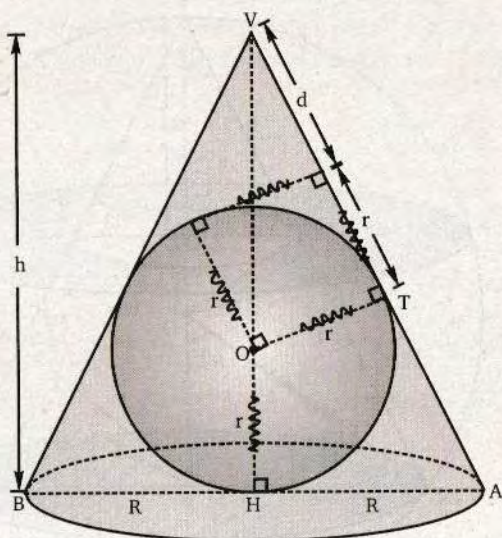
Por el Teorema de Pappus:

$$V_g = 2\pi \left(\frac{16}{3} \right) \left(\frac{5 \times 5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{400}{3} \pi \mu^3$$



Rpta.: C

Resolución 79:

Piden el volumen del cono: $V_C = \frac{\pi}{3} R^2 h$

△ OTV (Notable de Pitágoras)

$$(OV)^2 = r^2 + (d+r)^2 \Rightarrow OV = \sqrt{r^2 + (d+r)^2}$$

$$\Rightarrow h = r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}$$

 $\triangle AHV \sim \triangle OTV$

$$\frac{R}{r} = \frac{r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}}{d+r}$$

$$\Rightarrow R = \frac{r(r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2})}{d+r}$$

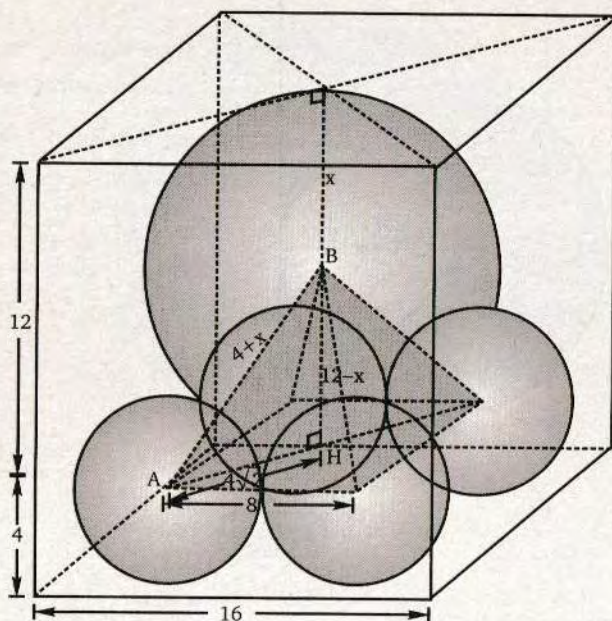
Luego:

$$V_C = \frac{\pi}{3} \left[\frac{r(r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2})}{d+r} \right]^2 \left[r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2} \right]$$

$$\therefore V_C = \frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2})^3}{3(d+r)^2}$$

Rpta.: B

Resolución 80:



Piden el radio de la quinta esfera. "x"

$\triangle ABH$ (Teorema de Pitágoras)

$$(4+x)^2 = (12-x)^2 + (4\sqrt{2})^2$$

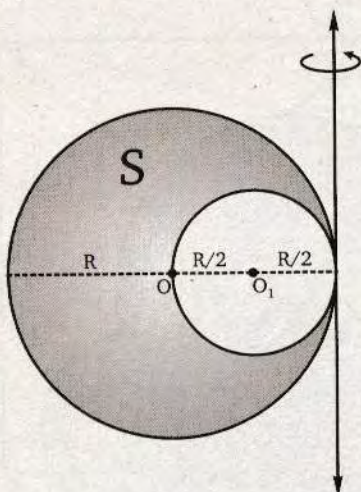
$$(4+x)^2 - (12-x)^2 = 32$$

Por diferencia de cuadrado:

$$(16)(2x-8) = 32$$

$$\therefore x = 5$$

Rpta.: C

Resolución 81:Piden: V_{SG}

Por el teorema de Pappus:

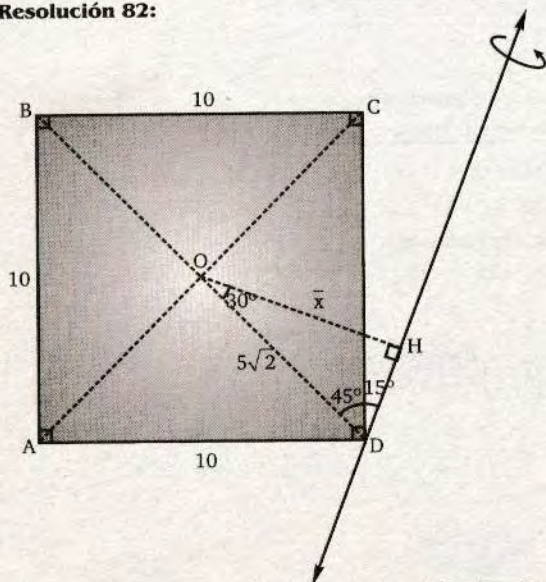
$$V_{SG} = 2\pi(R)(\pi R^2) - 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)\left(\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)$$

$$V_{SG} = 2\pi^2 R^3 - \frac{1}{4} \pi^2 R^3$$

$$\therefore V_{SG} = \frac{7}{4} \pi^2 R^3$$

Rpta.: E

Resolución 82:

Piden: V_{SG}

Dato: $S_{ABCD} = 100\text{cm}^2$

$$\Rightarrow AB = 10\text{cm}$$

△DOH (Notable de 60° y 30°):

$$\bar{x} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

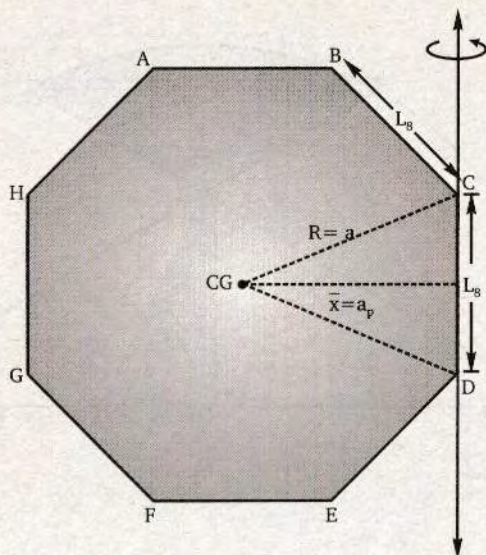
Luego por el Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi \left(\frac{5\sqrt{6}}{2} \right) \quad (100)$$

$$\therefore V_{SG} = 500\pi\sqrt{6}\text{cm}^3$$

Rpta.: E

Resolución 83:



Piden: V_{SG}

Se observa que $\bar{x} = a_p$ y $R = a$

$$S = 8 \left(\frac{L_{8ap}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S = 4L_8 \cdot ap$$

Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi(ap)(4L_8 \cdot ap)$$

$$\Rightarrow V_{SG} = 8\pi(ap)^2 L_8$$

$$\Rightarrow V_{SG} = 8 \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2 (R\sqrt{2 - \sqrt{2}})$$

$$V_{SG} = 2\pi R^3 \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

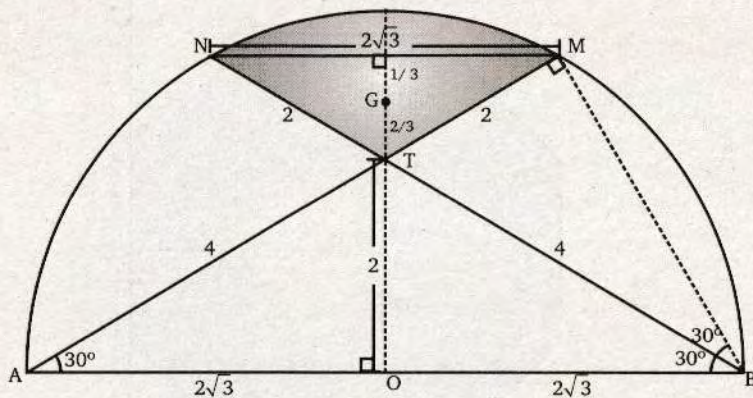
$$V_{SG} = 2\pi a^3 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$\therefore V_{SG} = \pi \sqrt{16 + 8\sqrt{2}} a^3$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 12

Resolución 84:



Piden: V_G

V_1 : V_G (Región triangular rectilínea MNT)

Por el Teorema de Pappus

$$V_1 = 2\pi \left(\frac{2}{3} + 2 \right) \left(\frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$$

V_2 : Anillo Esférico del Segmento $\overline{MN}$

$$V_2 = \frac{\pi}{6} (MN)^3$$

$$V_2 = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{3})^3$$

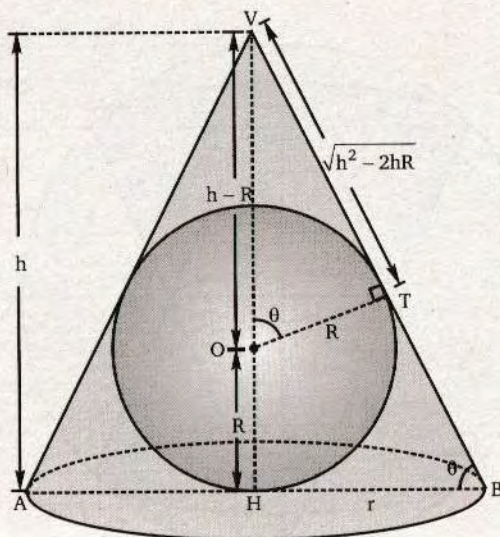
$$\Rightarrow V_2 = \frac{12\pi\sqrt{3}}{3}$$

Luego: $V_G = V_1 + V_2$

$$\therefore V_G = \frac{28\pi\sqrt{3}}{3} \mu^3$$

Rpta.: A

Resolución 85:



$$\triangle BHV \sim \triangle OTV:$$

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}$$

Entonces:

$$V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\Rightarrow V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} \left[\frac{R^2 h^2}{h - 2R} \right]$$

$$\Rightarrow V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2R^3}{\frac{2R}{h} \left(1 - \frac{2R}{h} \right)} \right]$$

$$\text{Sea: } a = \frac{2R}{h} \left(1 - \frac{2R}{h} \right) \Rightarrow V_{\text{CONO}} = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2R^3}{a} \right]$$

Aplicando la diferencia de medias:

$$MG \leq MA$$

$$\sqrt{\frac{2R}{h} \left(1 - \frac{2R}{h} \right)} \leq \frac{\frac{2R}{h} + \left(1 - \frac{2R}{h} \right)}{2}$$

$$\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}$$

$$a \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{a} \geq 4$$

$$\frac{\pi}{3} \left[\frac{2R^3}{a} \right] \geq 8R^3 \times \frac{\pi}{3}$$

$$V_{\text{CONO}} \geq \frac{8\pi R^3}{3}$$

$$\therefore V_{(\text{CONO})\text{MIN}} = \frac{8\pi R^3}{3}$$

Rpta.: B

(II) en (III):

$$\frac{kR^2(2-k)}{k^2} = \frac{a^2}{1} = \frac{b^2}{(2-k)^2}$$

$$\frac{R^2(2-k)}{k} = \frac{a^2}{1} = \frac{b^2}{(2-k)^2} = \frac{a^2 + b^2}{5-4k+k^2} \dots \dots \text{(Por Teorema de Proporciones)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{R^2}{k}(2-k)(5-4k+k^2) \\ a = \frac{R\sqrt{2-k}}{\sqrt{k}} \\ b = \frac{R\sqrt{2-k(2-k)}}{\sqrt{k}} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{R^2(2-k)^2}{k}$$

Reemplazando en (I):

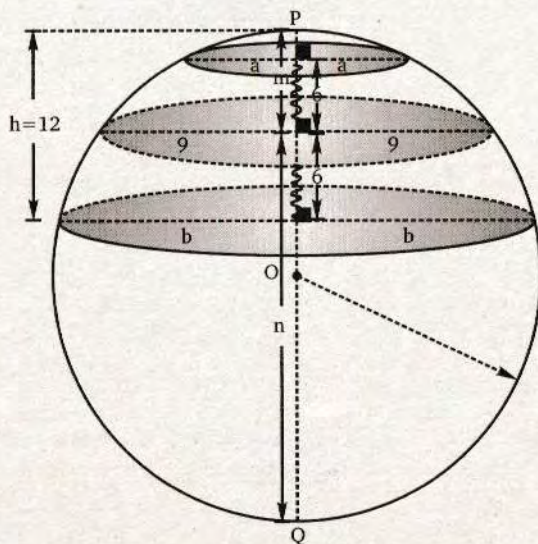
$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(k-1)}{R^2} \left[\frac{R^2}{k}(2-k)(5-4k+k^2) + \frac{R^2}{k}(2-k)^2 \right]$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(k-1)}{k} \left[(2-k)(7-5k+k^2) \right]$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{2} (k-1) \left(\frac{2}{k} - 1 \right) (k^2 - 5k + 7)$$

Rpta.: B

Resolución 87:



$$\text{Piden: } V_{\text{SEGM}} = \frac{\pi}{6} h^3 + \frac{\pi}{2} h(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow V_{\text{SEGM}} = \frac{\pi}{6} (12)^3 + \frac{\pi}{2} (12)(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow V_{\text{SEGM}} = 288\pi + 6\pi(a^2 + b^2) \dots (I)$$

Por relación métrica:

$$\begin{cases} 9^2 = mn \\ a^2 = (m-6)(n+6) \\ b^2 = (m+6)(n-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 81 = mn \\ a^2 = mn + 6m - 6n - 36 \\ b^2 = mn - 6m + 6n - 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{2mn - 72}{81}$$

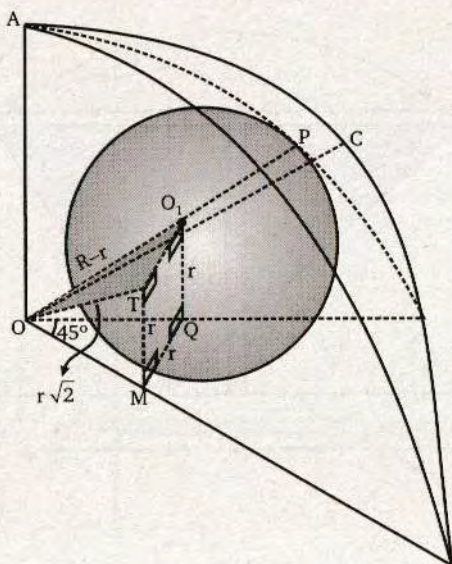
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 90 \dots (II)$$

(II) en (I):

$$V_{\text{SEGM}} = 288\pi + 6\pi(90)$$

$$\therefore V_{\text{SEGM}} = 288\pi m^3$$

Rpta.: D

Resolución 88:

Piden el área de la superficie de la esfera inscrita en el octante

Sean O y O_1 : centros de las esferas

P; Q, T: Puntos de tangencia

$$m\angle OOB = m\angle OOC = 45^\circ$$

Trazamos $\overline{QM} \perp OB$

$\triangle$ OQM (Notable de 45°): $OM = MQ = r$

△ OTM (Notable de 45°): $OT = r\sqrt{2}$

△ OTO' (Teorema de Pitágoras):

$$(R-r)^2 = (r\sqrt{2})^2 + r^2$$

$$2r^2 + 2Rr - R^2 = 0$$

Aplicando fórmula general:

$$r = \frac{-2R + \sqrt{4R^2 + 8R^2}}{4}$$

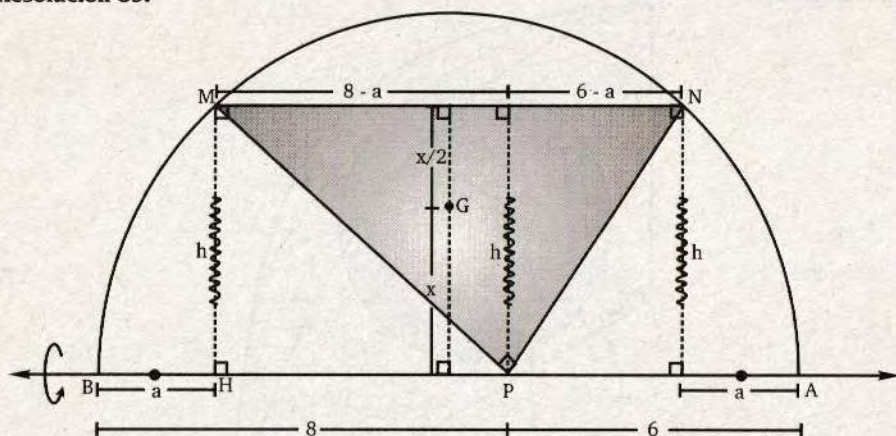
$$\Rightarrow r = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$\text{Luego: } S_E = 4\pi \left[\frac{R(\sqrt{3}-1)}{4} \right]^2$$

$$\therefore S_F = \pi R^2(4 - 2\sqrt{3})$$

Rpta.: D

Resolución 89:

Piden V_G

Por relación métrica:
$$\begin{cases} (MH)^2 = h^2 = a(14-a) \\ (PQ)^2 = h^2 = (8-a)(6-a) \\ a(14-a) = (8-a)(6-a) \\ 2 \cdot (12) \quad (6) \cdot (4) \\ \Rightarrow a = 2 \\ \Rightarrow h^2 = 2(14-2) \Rightarrow h = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

También: $3 \frac{\bar{x}}{2} = h \Rightarrow \bar{x} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Además: $S_{\Delta} = \frac{(10)(2\sqrt{6})}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = 10\sqrt{6}$

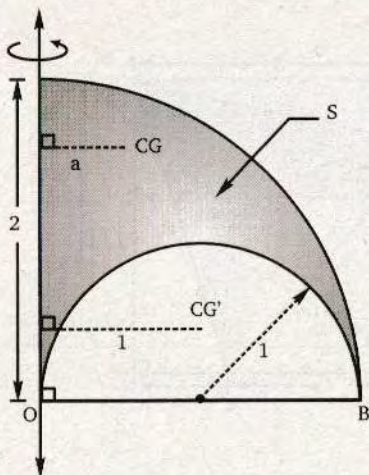
Luego por el teorema de Pappus:

$$V_G = 2\pi \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} \right) (10\sqrt{6})$$

$$\therefore V_G = 160\pi \mu^3$$

Rpta.: B

Resolución 91:

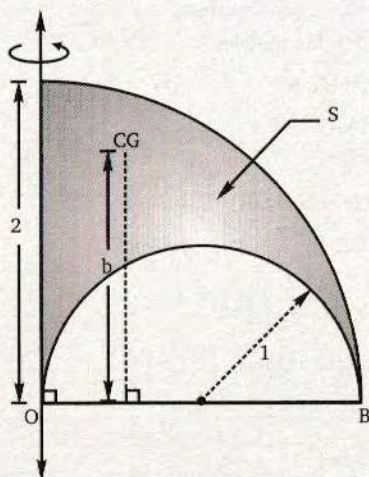


Piden a/b ; la cual no depende del radio del cuadrante, por ello utilizaremos un valor conveniente ($R=2$)

$$V_{SG} = V_{\text{semiesfera}} - V_{\text{semitoro}}$$

$$2\pi aS = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi (2)^2 \right) - 2\pi (1) \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$2aS = \frac{16 - 3\pi}{3} \quad \dots (I)$$



$$V_{SG} = V_{\text{semiesfera}} - V_{\text{esfera}}$$

$$2\pi bS = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi (2)^3 \right) - \frac{4}{3} \pi (1)^3$$

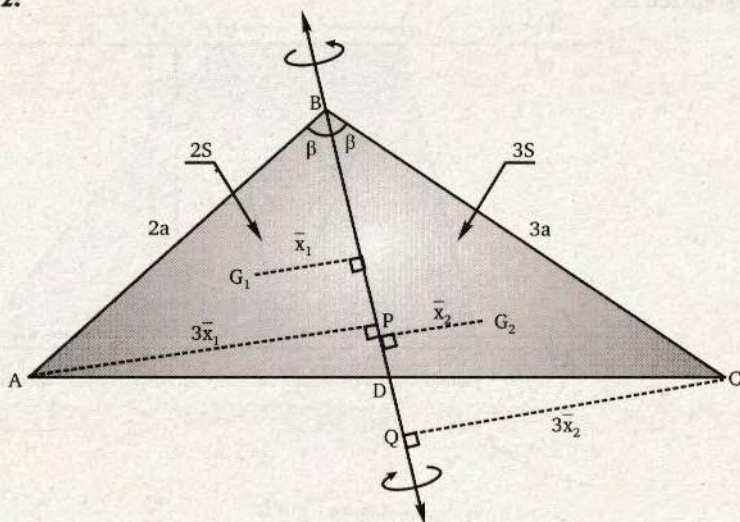
$$2bS = 4 \quad \dots (II)$$

Luego (I) / (II):

$$\frac{a}{b} = \frac{16 - 3\pi}{12}$$

Rpta.: A

Resolución 92:



Piden:

$$\mu = \frac{V_1}{V_2}$$

Por el Teorema de Pappus

$$\mu = \frac{2\pi \bar{x}_1 (2S)}{2\pi \bar{x}_2 (3S)}$$

$$\mu = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right) \dots (I)$$

$\triangle BAP \sim \triangle BCQ$:

$$\frac{3\bar{x}_1}{3\bar{x}_2} = \frac{2a}{3a} \Rightarrow \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{2}{3} \dots (II)$$

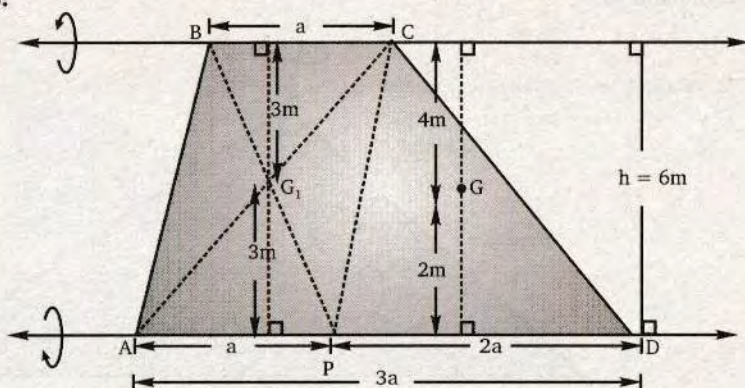
(II) en (I):

$$\mu = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$\mu = \frac{4}{9}$$

Rpta.: C

Resolución 93:



Piden: $\mu = \frac{V_{L_1}}{V_{L_2}}$

Formamos el paralelogramo ABCD

Entonces: $\begin{cases} S_{ABCD} = 6am \\ S_{PCD} = 6am \end{cases}$

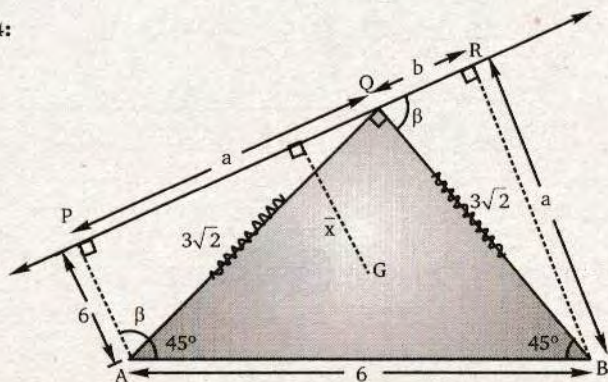
Luego por el Teorema de Pappus: $\mu = \frac{2\pi(3m)(6am) + 2\pi(4m)(6am)}{2\pi(3m)(6am) + 2\pi(2m)(6am)}$

$$\mu = \frac{7m}{5m}$$

$$\mu = \frac{7}{5}$$

Rpta.: A

Resolución 94:



Piden: V_G

Dato: $PQ = a + b = 5$

$\triangle APO \cong \triangle OQB$

$AP = b$

$BQ = a$

Teorema: $\bar{x} = \frac{a+b}{3}$

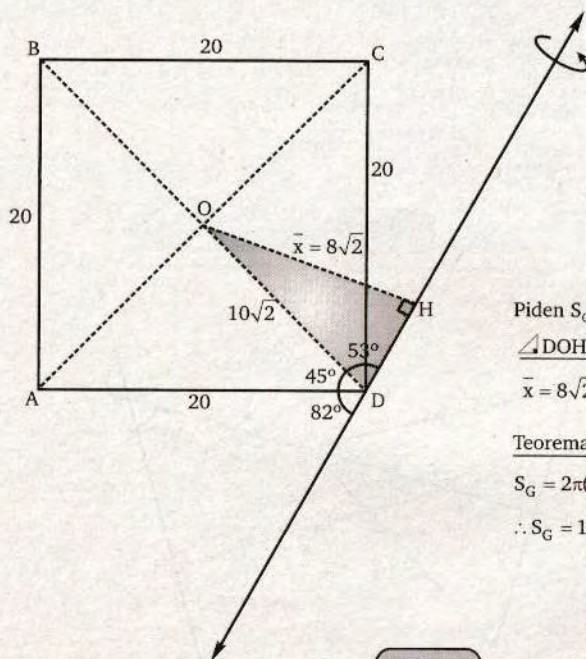
$$\bar{x} = \frac{5}{3}$$

Teorema de Pappus: $V_G = 2\pi \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\therefore V_G = 30\pi \mu^3$$

Rpta.: D

Resolución 94:



Piden S_G

$\triangle DOH$ (Notable de 53° y 37°)

$$\bar{x} = 8\sqrt{2}$$

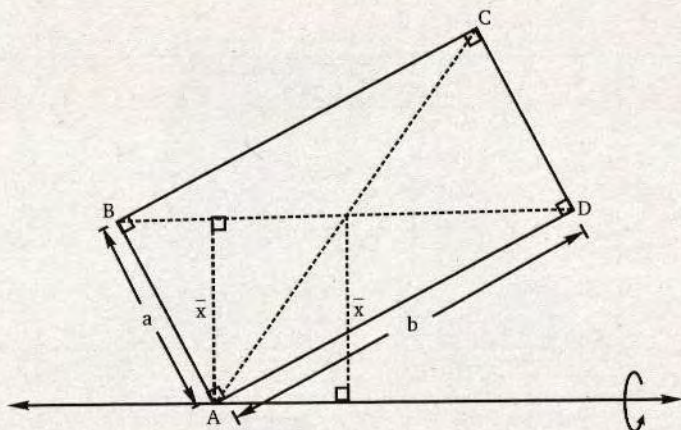
Teorema de Pappus:

$$S_G = 2\pi(8\sqrt{2})(4 \times 20)$$

$$\therefore S_G = 1280\sqrt{2}\pi \mu^2$$

Rpta.: B

Resolución 96:



Piden: V_G

$\triangle BAD$ (Relación Métrica)

$$\frac{1}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

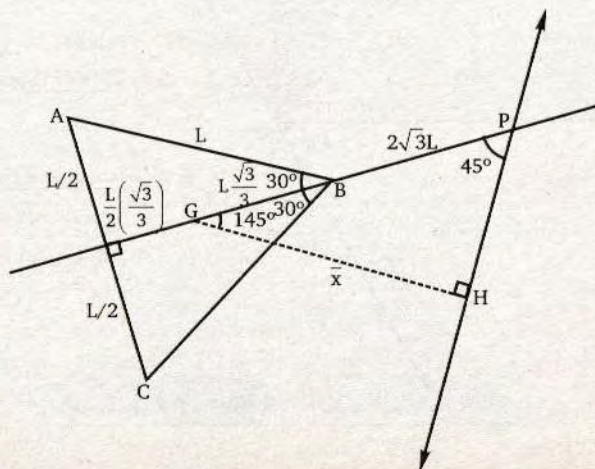
Teorema de Pappus:

$$V_G = 2\pi \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) (ab)$$

$$\therefore V_G = \frac{2\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Rpta.: C

Resolución 97:



Piden: V_{SG}

$\triangle PGH$ (notable de 45°)

$$\bar{x}\sqrt{2} = \frac{L\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}L$$

$$\bar{x} = \frac{7\sqrt{2}\sqrt{3}}{6}L$$

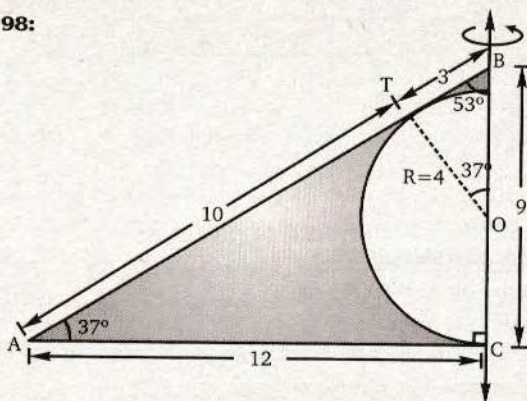
Teorema de Pappus:

$$V_{SG} = 2\pi \left(\frac{7\sqrt{2}\sqrt{3}}{6}L \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4}L^2 \right)$$

$$\therefore V_{SG} = \frac{7\sqrt{2}}{4}\pi L^3$$

Rpta.: B

Resolución 98:



Piden: V_{SG}

$\triangle ABC$ y $\triangle OBT$:

Notable de 37° y 53°

$$BC = 9 \wedge R = 4$$

Luego:

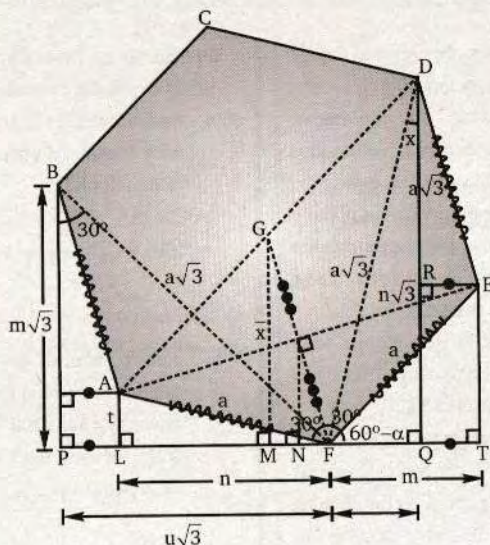
$$V_{SG} = V_{\text{cono}} - V_{\text{sfera}}$$

$$V_{SG} = \frac{\pi(12)^2(9)}{3} - \frac{4}{3}\pi(4)^3$$

$$\therefore V_{SG} = \frac{1040\pi}{3}\mu^3$$

Rpta.: B

Resolución 100:



Se trata de una región hexagonal regular

Datos: $CE = a\sqrt{3} \wedge BP + DQ = b$

$AB = a$

Como $AB \parallel DE \wedge BP \parallel DQ$

Encontramos $\triangle ABS \cong \triangle EDR$

Completando medidas angulares encontradas

$\triangle AFL \sim \triangle DFQ$

$\triangle EFT \sim \triangle BFP$

Por ello si $BP = m\sqrt{3} \wedge DQ = n\sqrt{3}$

$FL = n \wedge FT = m$

También si $AL = Z \wedge ET = u$

$FP = Z\sqrt{3} \wedge PF = u\sqrt{3}$

En el segmento PT: $m - Z\sqrt{3} = u\sqrt{3} - n$

$3(m+n) = 3(Z+u)$

$$\frac{b}{2} = 3\left(\frac{t+u}{2}\right) \quad \frac{b}{2} = 3\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = \frac{b}{3} \quad \dots(I)$$

$$\text{Luego: } V_{G(120)} = 2\pi\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\left(\frac{120}{360}\right)$$

$$\therefore V_{G(120)} = a^2 b \pi \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rpta.: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Cuatro puntos no coplanares siempre pueden estar contenidos en una misma superficie esférica.

II. Si la intersección entre un plano y una superficie esférica es mas de un punto, entonces ésta intersección es un círculo.

III. El centro de la base de un cono siempre equidista de las generatrices del cono.

IV. Un sector circular y un eje que solo pasa por su vértice son coplanares. Entonces al girar el sector circular alrededor del eje genera un segmento esférico.

A) VVVV B) VFFF C) VFVF
D) FVVV E) VFVV

2. Un cubo y una esfera tiene igual área que 2.4 m^2 . El volumen del cubo es al volumen de la esfera como:

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{e}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$
D) $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$ E) $\frac{\pi}{4}$

3. En un cono equilátero, su altura es el diámetro de una esfera. Halle el área (en cm^2) del casquete mayor determinado, si la altura del cono es 4cm.

A) 6π B) 8π C) 12π
D) 16π E) 20π

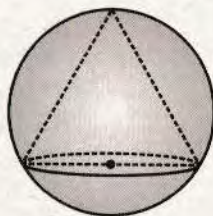
4. En un estuche cilíndrico se guardan tres pelotas de radio "r" que encajan exactamente. ¿Cuál es el volumen del aire dentro del estuche y circundante a las pelotas?

A) $2,5 \pi r^3$ B) πr^3 C) $2 \pi r^3$
D) $3 \pi r^3$ E) $1,5 \pi r^3$

5. Cuatro esferas de radio 10m son tangentes entre si formando una pila triangular (es decir una de ellas esta sobre los otros tres). Calcular la altura de la pila.

A) $\frac{20}{3}(\sqrt{2} + 3)\text{m}$ B) 40m
C) $\frac{20}{3}(1 + \sqrt{6})\text{m}$
D) $20(3 + \sqrt{2}/\sqrt{3})\text{m}$ E) $\frac{40}{3}(3 + \sqrt{3})\text{m}$

6. En la figura, el radio de la base del cono equilátero inscrito en la esfera mide 3cm. Halle el volumen de la esfera.

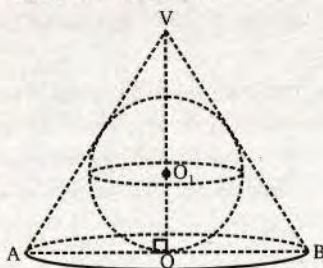


A) $20\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ B) $22\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$
C) $28\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$
D) $32\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ E) $40\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

7. En un tronco de cono circular recto de 35m de generatriz esta circunscrito a una esfera cuyo radio mide $10\sqrt{3}$ m. Calcule el área lateral del tronco de cono.

A) 1200π B) 1225π C) 1250π
D) 1275π E) 1300π

8. En la figura, la razón entre las áreas de la superficie esférica y la base del cono es de 4 a 3, Hallar $m\widehat{AVB}$.



A) 60° B) 45° C) 30°
D) 37° E) 53°

9. Halle el área de la superficie esférica inscrita en un cubo que a su vez está inscrita en una superficie esférica de 18 m^2 de área.

A) 8 m^2 B) 10 m^2 C) 7 m^2
D) 6 m^2 E) 12 m^2

10. Una esfera tiene 48 u^3 de volumen. Hallar el volumen del menor segmento esférico que se determina al trazar un plano secante a una distancia del centro igual a la mitad

del radio.

A) 6 u^3 B) 6.5 u^3 C) 7 u^3
D) 7.5 u^3 E) 9 u^3

11. Un exaedro regular cuya arista mide $4\sqrt{3}\text{ cm}$ esta inscrita en una esfera. Halle el volumen de la esfera.

A) $270\pi\text{ cm}^3$ B) $281\pi\text{ cm}^3$
C) $288\pi\text{ cm}^3$ D) $284\pi\text{ cm}^3$ E) $276\pi\text{ cm}^3$

12. El radio de una esfera mide 3cm. Calcular a que distancia del centro ha de trazarse un plano secante a dicha esfera para que el área de la sección resultante sea $1/3$ del área del círculo máximo de la esfera.

A) $\sqrt{5}\text{ cm}$ B) $\sqrt{6}\text{ cm}$ C) $\sqrt{7}\text{ cm}$
D) $2\sqrt{2}\text{ cm}$ E) $2\sqrt{5}\text{ cm}$

13. Un tanque de forma esférica lleno de agua tiene una superficie cuya área es $36\pi\text{ m}^2$. Halle su capacidad de litros.

A) $36,000\pi$ litros B) $27,000\pi$ litros
C) $32,000\pi$ litros D) $30,000\pi$ litros E) $25,000\pi$ litros

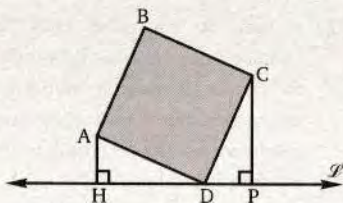
14. La arista de un tetraedro regular es a, hallar el volumen de la esfera tangente a las aristas.

A) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{24}$ B) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$ C) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$
D) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$ E) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{18}$

15. El volumen de un sólido de revolución por la rotación de un cuadrado de 6m de lado alrededor de una de sus diagonales es:

A) $3\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$ B) $36\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$
 C) $30\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$
 D) $36\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$ E) $32\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$

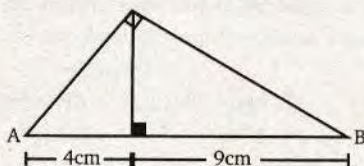
16. La figura ABCD es un cuadrado. Si $AH = 5$ y $CP = 12$, calcule el volumen del sólido generado al girar la región sombreada 360° respecto a la recta.



- A) 2500π B) 3600π C) 4900π
 D) 2873π E) 3873π
17. Dado un rombo cuyo lado mide 5 m y diagonal mayor 8 m gira alrededor de una paralela a esta diagonal mayor, trazada por el extremo de la diagonal mencionada. Calcular el volumen engendrado.

A) $144\pi\text{ m}^3$ B) $36\pi\text{ m}^3$
 C) $432\pi\text{ m}^3$
 D) $288\pi\text{ m}^3$ E) $72\pi\text{ m}^3$

18. El volumen del sólido generado por la rotación sobre el segmento AB del triángulo de la figura es:



- A) $152\pi\text{ cm}^3$ B) $210\pi\text{ cm}^3$
 C) $186\pi\text{ cm}^3$
 D) $239\pi\text{ cm}^3$ E) $156\pi\text{ cm}^3$
19. Un cuadrado de 12 cm. de diagonal realiza una revolución completa alrededor de uno de sus diagonales, el volumen del sólido engendrado, en cm^3 es:
- A) 288π B) 72π C) $144\pi\sqrt{2}$
 D) 144π E) $288\pi\sqrt{2}$
20. Si un triángulo rectángulo gira alrededor de uno de sus catetos genera un cono de 80 cm^3 de volumen pero, si gira alrededor del otro cateto genera un cono de 60 cm^3 . ¿Qué volumen tendrá el sólido de revolución generado por dicho triángulo, cuando gira alrededor de su hipotenusa?
- A) 100 cm^3 B) 34.3 cm^3 C) 50 cm^3
 D) 67.7 cm^3 E) 48 cm^3

21. Una esfera cuya superficie tiene una área de 144 cm^2 , es intersectada por dos planos que forman un ángulo diedro que mide 60° , de modo que la intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisector contiene al diámetro de la esfera. calcule el volumen (en cm^3) de la parte de la esfera comprendida en el ángulo diedro.
- A) 250π B) 198π C) 252π
D) 253π E) 254π
22. Calcule el volumen de un cilindro de revolución generado por la rotación de una región rectangular alrededor de un lado. El área de dicha región es igual a 20 m^2 y la longitud de la circunferencia que describe el punto de intersección de las diagonales del rectángulo es igual a 2π .
- A) $10\pi \text{ m}^3$ B) $20\pi \text{ m}^3$ C) $25\pi \text{ m}^3$
D) $40\pi \text{ m}^3$ E) $80\pi \text{ m}^3$
23. Las caras semicirculares de una cuña esférica forman un diedro de 72° . Si el volumen de la esfera es $36\pi \text{ m}^3$, halle el área total de la cuña.
- A) $16\pi \text{ m}^2$ B) $\frac{81}{5}\pi \text{ m}^2$
C) $\frac{82}{5}\pi \text{ m}^2$
D) $15\pi \text{ m}^2$ E) $\frac{83}{5}\pi \text{ m}^2$
24. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base, si el radio de la esfera mide $8u$ y el área de la superficie que la limita es los $7/16$ del área de la superficie esférica.
- A) $\frac{320\pi}{3}u^3$ B) $\frac{640\pi}{3}u^3$
C) $\frac{480\pi}{3}u^3$
D) $100\pi u^3$ E) $110\pi u^3$
25. Calcular el volumen del cono de revolución, circunscrito a una esfera de radio R , y de volumen mínimo.
- A) $\frac{5\pi}{3}R^3$ B) $2\pi R^3$ C) $\frac{8\pi}{3}R^3$
D) $3\pi R^3$ E) $\frac{10\pi}{3}R^3$
26. La razón entre el volumen del cono recto y el volumen de la esfera inscrita en él es K , hallar la razón entre el área de la superficie total del cono y el área de la superficie esférica.
- A) $K/2$ B) K C) $2K/3$
D) $4K/3$ E) $3K/2$
27. Un recipiente esférico de radio R contiene agua hasta el nivel del ecuador, este líquido se vierte en un recipiente de radio: $r = R/2$. Determinar el nivel que alcanza el agua en el cilindro.
- A) $2R$ B) $8/3R$ C) $5/3R$
D) $3/2R$ E) $4R$

28. Sobre el círculo mayor de una esfera como base, se dibuja un cono recto equivalente a la mitad de la esfera. Calcular la longitud del radio del segundo círculo de intersección; si el radio de la esfera mide r unidades.

A) $r/4$ B) $3r/5$ C) $4r/5$
D) $r/3$ E) $2r/5$

29. Un tronco de pirámide cuadrangular regular está circunscrito a una esfera y el lado de la base menor mide $4u$ y su volumen es $\frac{448\sqrt{2}}{3}u^3$.

Halle el área total del tronco de pirámide.

A) $234u^3$ B) $244u^3$ C) $214u^3$
D) $224u^3$ E) $204u^3$

30. Una esfera esta inscrita en un cono recto de altura h , una de las generatrices del cono ha quedado dividido por el punto de tangencia en dos segmentos de longitudes m y n , entonces para determinar el volumen de la esfera es necesario conocer:

A) m, n y h
B) Solo m
C) solo n
D) solo m y n
E) faltaría más información

31. Se tiene una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$ y una cuenta $\overline{AC}$, se traza la perpendicular $\overline{CD}$ al diámetro y luego se hace girar alrededor del diámetro. Si el volumen del anillo generado es el doble del volumen generado por la región triangular ACD , entonces la longitud de $\overline{AD}$ es

A) $\frac{2R}{3}$ B) $\frac{3R}{2}$ C) $\frac{R}{2}$
D) $\frac{4R}{3}$ E) $\frac{5R}{4}$

32. Una esfera está inscrita en un hexaedro regular $MNPQ-RSTU$ de arista ℓ . Entonces, el área de la superficie cónica de vértice P , tangente a la superficie esférica es

A) $\frac{\ell\pi^2\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\pi\ell^2}{3}$ C) $\frac{\pi\ell^2}{2}$
D) $\frac{\pi\ell^2}{4}$ E) $\frac{\pi\ell^2}{5}$

33. Halle el volumen de la esfera inscrita en un tetraedro regular de arista a .

A) $\frac{\pi a^3}{27}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$
C) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$
D) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$ E) $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{129}$

34. En una superficie esférica, se traza un plano secante tal que el área del casquete esférico correspondiente es cuatro veces el área de la base del casquete. Si la longitud del radio de la

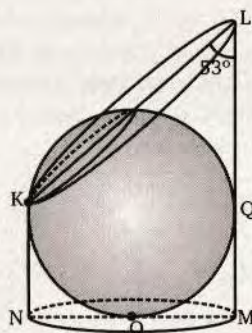
superficie esférica es $4\sqrt{3}\text{cm}$,
entonces el volumen (en cm^3) del
segmento esférico limitado por el
casquete esférico es

- A) $216\sqrt{3}\pi$ B) $208\sqrt{3}\pi$
C) $232\sqrt{3}\pi$
D) $220\sqrt{3}\pi$ E) $215\sqrt{3}\pi$

35. En un semicírculo de diámetro $\overline{MN}$, se
traza una cuerda $\overline{AB}$, tal que: $\overline{AB} \parallel$
 $\overline{MN}$ y $m\widehat{AB} = 120^\circ$. Calcule el
volumen del sólido que se genere al
hacer girar el segmento circular AB ,
alrededor del diámetro MN , si el
volumen de una esfera con igual radio
que el semicírculo es $24\sqrt{3}\text{dm}^3$

- A) $24\sqrt{3}\text{dm}^3$ B) $18\sqrt{3}\text{dm}^3$
C) 21dm^3
D) 24dm^3 E) 27dm^3

36. En la figura mostrada se tiene un
tronco de cilindro de revolución y una
esfera tangente a su superficie lateral.
Siendo K , Q y O punto de tangencia,
 $\overline{KN}$ y $\overline{LM}$ generatrices mínima y
máxima respectivamente. Si
 $KN=20\text{cm}$ y $LM=50\text{cm}$, calcule el
área (en cm^2) del casquete esférico
exterior al cilindro.



- A) 300π B) 320π C) 330π
D) 340π E) 350π

37. En un cono de revolución de altura $8u$
y base de radio $6u$, se inscribe una
esfera la cual es tangente a la
superficie lateral del cono mediante
una circunferencia. El plano de ésta
circunferencia determina en la esfera
un segmento esférico menor de una
sola base. Entonces el volumen (en
 u^3) del segmento esférico es:

- A) $\frac{117\pi}{125}$ B) $\frac{234\pi}{125}$ C) $\frac{351\pi}{125}$
D) $\frac{468\pi}{125}$ E) $\frac{702\pi}{125}$

38. Halle el volumen de un segmento
esférico de una sola base, sabiendo
que el área del casquete esférico
correspondiente es cuatro veces el
área de la base y el radio de la esfera
mide $4\sqrt{3}u$.

- A) $216\sqrt{3}\pi$ B) $208\sqrt{3}\pi$
C) $232\sqrt{3}\pi$
D) $220\sqrt{3}\pi$ E) $215\sqrt{3}\pi$

39. ABCD es un rectángulo, $AB = 3$, $BC = 4$, se inscribe en ABC una circunferencia. Halle el volumen que genera el círculo inscrito al rotar alrededor de la recta AC.

A) πu^3 B) $\frac{\pi}{2} u^3$ C) $\frac{\pi}{2} u^3$
 D) $\frac{3\pi}{2} u^3$ E) $2\pi^2 u^3$

40. El volumen del segmento esférico de una base de una esfera, es $\frac{8\pi}{3} m^3$ y su área total es $11\pi m^2$. Calcular el área (m^2) de la superficie esférica.

A) 18π B) 27π C) 36π
 D) 45π E) $\frac{27}{2}\pi$

41. Cuatro esferas congruentes de radio r , están inscritos en un cubo de tal manera que son tangentes a la base ya las caras laterales consecutivas 2 a 2. Entonces el radio de una quinta esfera que es tangente a las cuatro esferas dadas y a la cara opuesta es:

A) $\frac{r}{2}$ B) $\frac{r}{4}$ C) $\frac{3r}{4}$
 D) $\frac{5r}{4}$ E) $\frac{3r}{2}$

42. Halle el volumen de una esfera inscrita de un octaedro regular cuya arista mide a unidades.

A) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{27}$ B) $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$ C) $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{27}$
 D) $\frac{\sqrt{5}\pi a^3}{27}$ E) $\frac{\pi a^3}{27}$

43. En una pirámide regular hexagonal esta inscrita una esfera, si la arista básica de la pirámide mide a unidades y las caras laterales forman ángulos diedros que miden 60° con la base, calcule el área de la superficie esférica

A) $2\pi a^2$ B) $\frac{3}{2}\pi a^2$ C) πa^2
 D) $\frac{3}{4}\pi a^2$ E) $\frac{\pi}{2}\pi a^2$

44. En un tronco de cono de revolución se encuentra inscrita una esfera cuya área total se desea calcular, sabiendo que la suma de su diámetro con una de las generatrices del tronco de cono es 25 y la suma de los radios de las bases del tronco es 13.

A) 100π B) 105π C) 120π
 D) 144π E) 150π

45. Una esfera tiene $48 u^3$ de volumen; se traza un plano secante a una distancia del centro longitud a la mitad del radio. Entonces, el volumen (en u^3) del menor segmento esférico que se determina es:

A) 6,5 B) 6 C) 7,5
 D) 8 E) 8,5

46. Una superficie esférica de área $144\pi u^2$ es intersectado por dos planos que forman entre si un ángulo diedro que mide 60° , de modo que la recta de intersección de los dos planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz

contiene un diámetro de la esfera.
Halle el volumen de la parte de la esfera comprendido en el ángulo diedro.

- A) 180π B) 188π C) 190π
D) 198π E) 200π

47. El área total de un cono equilátero es 27cm^2 . Calcular el área de la superficie esférica de la esfera inscrita.

- A) $9u^2$ B) $16u^2$ C) $8u^2$
D) $12u^2$ E) $15u^2$

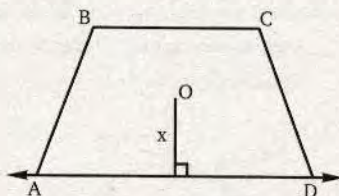
48. La longitud del lado de un cuadrado ABCD mide 20m, se traza una recta $\tilde{L}$ por el punto D de manera que forma un ángulo de 82° con $\overline{AD}$. Calcule el área generada por el cuadrado al girar alrededor de la recta $\tilde{L}$.

- A) $1180\sqrt{2}\pi$ B) $1280\sqrt{2}\pi$
C) $1380\sqrt{2}\pi$
D) $1480\sqrt{2}$ E) $1480\sqrt{2}\pi$

49. Halla la longitud de la altura de una zona esférica de una base cuyo radio de la esfera mide 8m tal que el área de la superficie de esta zona aumentada en el área de la base es igual a los $7/16$ del área de la superficie esférica.

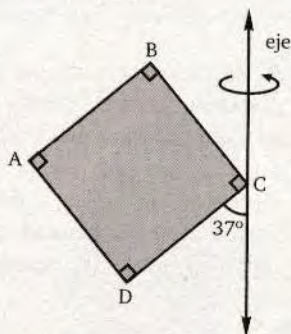
- A) 1m B) 2m C) 3m
D) 4m E) 5m

50. En la figura dada hallar x si O es el centro de gravedad de la región limitada por el trapecio isósceles de la figura. $AB = BC = CD = a$; $AD = 2a$.



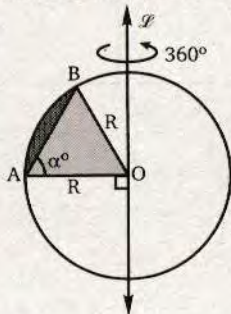
- A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{2a\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

51. Calcule el volumen que genera la región cuadrada ABCD del ado 10m al girar una vuelta alrededor del eje.



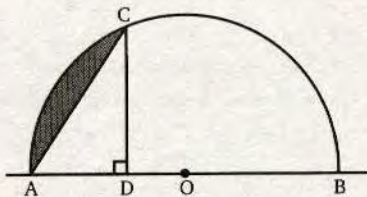
- A) $800\pi\text{m}^3$ B) $900\pi\text{m}^3$ C) $1200\pi\text{m}^3$
D) $1400\pi\text{m}^3$ E) $1600\pi\text{m}^3$

52. En la figura, el volumen del sólido generado al girar la región triangular AOB una vuelta alrededor de $\mathcal{L}$ es tres veces el volumen del sólido generado por el segmento circular $\widehat{AB}$ al girar también una vuelta alrededor de $\mathcal{L}$, entonces el valor de α es.



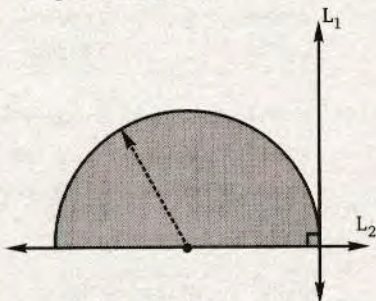
- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{5}$
D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

53. En la figura mostrada; AB es el diámetro de la circunferencia y $AB = 4u$. calcule AD para que el volumen del sólido generado por la región sombreada sea igual a 2 veces el volumen del sólido generado por la región triangular ADC, cuando gira alrededor del diámetro AB.



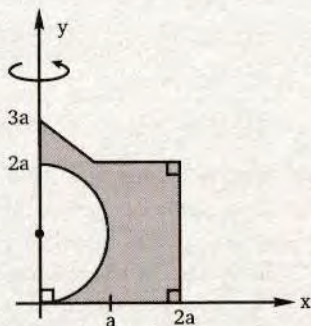
- A) 2 B) 3,5 C) 2,5
D) 3,0 E) 3

54. Según el gráfico, calcule la razón entre los volúmenes de los sólidos generados por la región sombreada al girar 360° alrededor de L_1 y L_2 respectivamente.



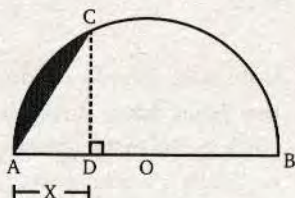
- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) π
D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

55. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje y.



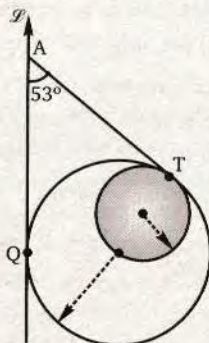
- A) $7\pi a^3$ B) $8\pi a^3$ C) $9\pi a^3$
D) $10\pi a^3$ E) $11\pi a^3$

56. En una semicircunferencia cuyo diámetro $\overline{AB}$ mide 4 cm. Determinar x para que el volumen del sólido generado por la región sombreada sea igual a 2 veces el volumen del sólido generado por la región triangular ADC , al girar una vuelta completa alrededor del diámetro $\overline{AB}$ (en cm).



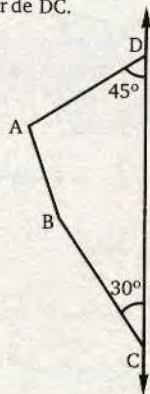
- A) 2 B) 15 C) 1
D) 3 E) 2,5

57. En el gráfico, T y Q son puntos de tangencia y $AT=20$. Calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° en torno a $\overline{L}$.



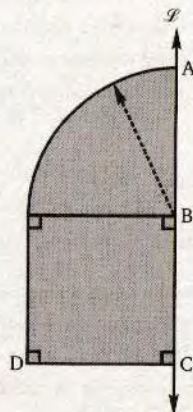
- A) $650\pi^2$ B) $300\pi^2$ C) $250\pi^2$
D) $150\pi^2$ E) $100\pi^2$

58. Según el gráfico, $AD = 3\sqrt{2}$ y $AB=BC=4$. Calcule el área de la superficie generada por $\overline{AB}$ al girar 360° alrededor de $\overline{DC}$.



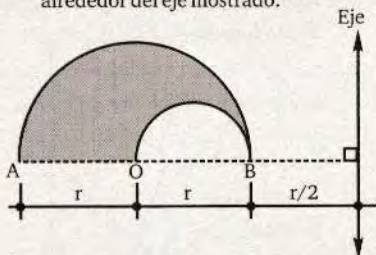
- A) 16π
B) 20π
C) 24π
D) 25π
E) 15π

59. En el gráfico, $AB = BC = CD = 4$. Calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de $\overline{L}$.



- A) $\frac{320\pi}{3}$ B) $\frac{112\pi}{3}$ C) $\frac{296\pi}{3}$
D) 100π E) $\frac{304\pi}{3}$

60. Hallar el volumen del sólido que genera la región sombreada al girar alrededor del eje mostrado.



- A) $\frac{2\pi^2 r^3}{4}$ B) $\frac{1\pi^2 r^3}{4}$
 C) $\frac{4\pi^2 r^3}{4}$
 D) $\frac{5\pi^2 r^3}{4}$ E) $\frac{3\pi^2 r^3}{4}$
61. Las generatrices de un cono circular recto están inclinadas 60° respecto al plano de la base. El volumen del cono 100 cm^3 . Hallar el volumen de una semiesfera cuyo círculo máximo está en la base del cono y cuya superficie es tangente a la superficie lateral del cono (en cm^3)
- A) $\frac{200}{3}$ B) 60 C) 75
 D) 40 E) 80
62. Una esfera y un cono están inscritas en un cilindro de revolución, de manera que el radio de la esfera mide r . Halle el volumen de la porción de cono común con la esfera.

- A) $\frac{128}{375} \pi r^3$ B) $\frac{28}{75} \pi r^3$ C) $\frac{12}{25} \pi r^3$
 D) $\frac{82}{79} \pi r^3$ E) $\frac{18}{35} \pi r^3$

63. En un tetraedro regular, su arista mide ℓ unidades. Entonces, la longitud del radio de la superficie esférica exinscrita relativa a una de sus caras es:

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3} \ell$ B) $\frac{\sqrt{6}}{6} \ell$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3} \ell$
 D) $\frac{\sqrt{6}}{2} \ell$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2} \ell$

64. Hallar la razón entre el radio de la base de un cono y el radio de una esfera inscrita en dicho cono, siendo el volumen de la esfera al volumen del cono como 1 es a 2.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 D) $\sqrt{2}$ E) 2

65. Una esfera pasa por los puntos medios de tres aristas de un cubo que contienen un vértice y por el vértice del cubo opuesto al primero. Si la arista del cubo es a unidades, entonces el área (en u^2) de la superficie esférica.

- A) $\frac{243}{100} \pi a^2$ B) $3\pi a^2$
 C) $\frac{19}{243} \pi a^2$
 D) $\frac{5}{243} \pi a^2$ E) $6\pi a^2$

66. En un tetraedro regular su arista mide ℓ unidades, se inscribe una esfera tangente a todas sus aristas. Entonces, el volumen de la parte de la esfera exterior al tetraedro es:

A) $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{2}}{108} (9 + 4\sqrt{3})$
 B) $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{2}}{108} (9 - 4\sqrt{3})$
 C) $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{2}}{36} (6 - \sqrt{3})$
 D) $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{2}}{72} (6 - 2\sqrt{3})$
 E) $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{2}}{72} (8 - 3\sqrt{3})$

67. La relación entre el volumen del sólido limitado por un tronco de pirámide regular cuadrangular de áreas de sus bases $4\ell^2$ y $16\ell^2$ y el volumen de una esfera inscrita es:

A) $\frac{11}{\pi}$ B) $\frac{6}{\pi}$ C) $\frac{8}{\pi}$
 D) $\frac{7}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{7}$

68. Desde un punto P exterior a una esfera se trazan todas las rectas tangentes a la superficie esférica, formándose un cono equilátero cuya base es un círculo menor de la esfera. Si el volumen del cono es 81π entonces el volumen del sólido limitado por la esfera es:

A) 280π B) 288π C) 290π
 D) 298π E) 300π

69. El vértice del cono recto circunscrito a una esfera dista $4u$ de la esfera. Si el área lateral del cono limitado por la circunferencia de tangencia es la cuarta parte del área de la esfera. Halle el radio de la esfera.

A) $2\sqrt{5}$ B) $3(\sqrt{5} - 1)$
 C) $2(\sqrt{5} + 1)$
 D) $4(\sqrt{5} - 1)$ E) $4\sqrt{5}$

70. En una esfera cuyo volumen es $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$

dos planos paralelos determinan secciones en la secciones en la esfera, una es un círculo máximo y la otra un círculo menor de 9 cm^2 de área.. Halle el área de la zona esférica determinada por las secciones paralelas.

A) $38\pi \text{ cm}^2$ B) $40\pi \text{ cm}^2$ C) $42\pi \text{ cm}^2$
 D) $45\pi \text{ cm}^2$ E) $46\pi \text{ cm}^2$

71. Se tiene una esfera circunscrita a un tronco de cono recto de $6u$ y $8u$ de radio de sus bases y de altura igual a $14u$. Halle el volumen limitado por el casquete esférico correspondiente a la base mayor del tronco del cono.

A) $\frac{416\pi}{3}$ B) $\frac{416\pi}{5}$ C) $\frac{416\pi}{7}$
 D) $\frac{416\pi}{11}$ E) $\frac{416\pi}{13}$

72. Un cono de revolución cuyo volumen es $81\pi\text{cm}^3$ es seccionado por un plano paralelo a la base que pasa por el punto de trisección de la altura del cono más próximo a la base. Halle el volumen del tronco del cono determinado por la base del cono y la sección.

A) $57\pi\text{cm}^3$ B) $54\pi\text{cm}^3$ C) $49\pi\text{cm}^3$
D) $64\pi\text{cm}^3$ E) $55\pi\text{cm}^3$

73. Hallar el radio de la esfera inscrita en un tetraedro regular de arista a .

A) $a\sqrt{2}/4$ B) $a\sqrt{3}/3$ C) $a\sqrt{6}/6$
D) $a\sqrt{6}/12$ E) $a\sqrt{2}/8$

74. Se tiene una superficie esférica de radio R , inscrita en un cono circular recto. Si la distancia del vértice del cono hacia el centro de la superficie esférica es igual a $2R$, entonces el área del menor casquete determinado en la superficie esférica por la superficie lateral del cono es

A) $\frac{\pi R^2}{2}$ B) $\frac{3}{2}\pi R^2$ C) $\frac{\pi R^2}{4}$
D) πR^2 E) $\frac{\pi R^2}{3}$

75. Sobre la circunferencia mayor de una esfera tomado como hace base se construye un cono recto equivalente a la mitad de la esfera. Entonces, el radio del segundo círculo de intersección siendo R el radio de la esfera es:

A) $\frac{R}{5}$ B) $\frac{2R}{5}$ C) $\frac{3R}{5}$
D) $\frac{4R}{5}$ E) $\frac{2R}{3}$

76. En un hemisferio cuyo radio mide R se colocan tres esferas congruentes tangentes dos a dos, y tangentes al hemisferio. Luego se tapa con un círculo máximo al hemisferio siendo tangente a las tres esferas. Entonces, ¿Cuál es la longitud del radio de las esferas?

A) $\frac{R}{4}(\sqrt{21} - 3)$ B) $\frac{R}{4}(\sqrt{17} - 3)$
C) $\frac{R}{8}(\sqrt{21} - 3)$
D) $\frac{R}{4}(\sqrt{23} - 3)$ E) $\frac{R}{4}$

77. Se tiene una semicircunferencia de diámetro $AB=2R$ y una cuerda $\overline{AC}$, se traza la perpendicular $\overline{CD}$ al diámetro y luego se hace girar tomando como eje al diámetro. Si el volumen del anillo generado es el doble del volumen generado por la región triangular ACD , entonces la longitud de $\overline{AD}$ es:

A) $\frac{2R}{3}$ B) $\frac{3R}{2}$ C) $\frac{R}{2}$
D) $\frac{4R}{3}$ E) $\frac{5R}{4}$

78. El vértice de un cono circunscrito a una esfera dista de la superficie esférica 4m. Si la cuarta parte del área de la superficie esférica es igual al área de la superficie cónica limitada por la circunferencia de tangencia, calcule la longitud del radio de la esfera.

A) $(2\sqrt{5} + 1)m$ B) $2\sqrt{5}m$
C) $(\sqrt{5} + 1)m$
D) $(2\sqrt{5} + 2)m$ E) $(3\sqrt{5} + 2)m$

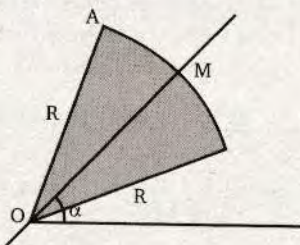
79. Se trazan dos planos paralelos uno de los cuales dista 4 dm del centro de una esfera de radio 12 dm y el otro pasa por el centro, entonces el volumen del segmento esférico determinado expresado en dm^3 es:

A) $\frac{1640}{3}\pi$ B) $\frac{1664}{3}\pi$ C) 550π
D) 560π E) $\frac{1684}{3}\pi$

80. Se tiene una esfera de radio 12u. ¿A qué distancia del centro de la esfera se debe trazar un plano secante para que las áreas de los casquetes formados estén en la relación de 1 a 4?

A) 8u B) 7,2u C) 6,4u
D) 8,2u E) 5,4u

81. AOB es un sector circular de radio R. Si $m\angle AOB = 60^\circ$, $\theta > 30^\circ$ y $\widehat{AM} = \widehat{MB}$, entonces el volumen del sólido generado por el sector circular al girar alrededor de la recta L es:



A) $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin\theta$ B) $\frac{\pi R^3}{3} \sin\theta$
C) $\frac{\pi R^3}{3} \sin 2\theta$
D) $\frac{R^3}{6} \sin\theta$ E) $\frac{\pi R^3}{2} \sin\theta$

82. Se tiene una superficie esférica de radio R, se traza dos planos perpendiculares a un diámetro $\overline{AB}$, de modo que uno de ellos dista del vértice A, h unidades y el otro plano dista del vértice B, 2h unidades. Si la razón de los radios de las secciones determinadas por los planos en la superficie esférica es de $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, entonces el valor de h es:

A) $\frac{2}{3}R$ B) $\frac{2}{7}R$ C) $\frac{2}{5}R$
D) $\frac{2}{9}R$ E) $\frac{1}{3}R$

83. En un triángulo ABC, obtuso en B, por el vértice A se traza una recta ℓ paralela al lado $\overline{BC}$. La región triangular ABC gira alrededor de la recta ℓ una vuelta completa. Si la altura trazada del vértice A al lado $\overline{BC}$ mide h y $BC = a$, entonces ¿cuál es el volumen del sólido generado?

A) $\frac{\pi a^2 h}{3}$ B) $\frac{2\pi a^2 h}{3}$ C) $\frac{2\pi h^2 a}{3}$
 D) $\frac{\pi h^2 a}{3}$ E) $\pi a^2 h$

84. Dos esferas de radios R y r ($R > r$) son tangentes exteriores. Calcular la longitud de la altura de un cono circunscrito a estas esferas, sabiendo que el eje del cono contiene a sus centros.

A) $\frac{2R^2}{R-r}$ B) $\frac{R^2}{R-r}$ C) $\frac{2R^2}{R+r}$
 D) $\frac{2(R+r)}{R-r}$ E) $\frac{R^2}{2(R+r)}$

85. Dos planos paralelos determinan en una esfera dos círculos de $16\pi u^2$ y $25\pi u^2$ de área. Si la distancia entre ellos es de $4u$ y están a un mismo lado del centro, calcular el volumen de la esfera.

A) $\frac{278}{3}\pi$ B) $\frac{250}{3}\pi$ C) $\frac{368}{3}\pi$
 D) $\frac{225}{3}\pi$ E) $\frac{290}{3}\pi$

86. Hallar el volumen de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista a

A) $\frac{\pi\sqrt{6}}{4}a^3$ B) $\frac{\pi\sqrt{6}}{8}a^3$ C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{8}a^3$
 D) $\frac{\pi\sqrt{6}}{10}a^3$ E) $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}a^3$

87. En un cono equilátero cuya generatriz mide L se inscribe una esfera. halle el área del menor casquete determinado en la esfera por la circunferencia de intersección con la superficie lateral.

A) $\frac{\pi L^2}{8}$ B) $\frac{\pi L^2}{9}$ C) $\frac{\pi L^2}{10}$
 D) $\frac{\pi L^2}{12}$ E) $\frac{\pi L^2}{6}$

88. Un cuadrado de lado a , gira alrededor de una recta exterior que pasa por un vértice y forma con el lado más próximo un ángulo de 15° . Hallar el volumen del sólido generado.

A) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$
 D) $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$

89. Se tiene un cubo cuyo arista mide L , se inscriben ocho esferas congruentes. Halle el radio de la menor esfera tangente a las ocho esferas.

A) $\frac{L}{8}(\sqrt{3}-1)$ B) $\frac{L}{4}(\sqrt{3}-1)$
 C) $\frac{L}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
 D) $\frac{L}{16}(\sqrt{3}+1)$ E) $\frac{3L}{8}(\sqrt{3}-1)$

90. Hallar el área mayor de una razón esférica proveniente de una superficie de esfera de centro O, al intersectarse dos planos determinando circunferencias de radios r y $2r$. Si la distancia de O al centro de la circunferencia menor es m , hallar su área.

A) $2\pi\sqrt{m^2 + r^2}(m + \sqrt{m^2 - 3r^2})$
 B) $\pi r \sqrt{mr}$
 C) $m\sqrt{m^2 - 3r^2} \pi$
 D) $\pi m\sqrt{m^2 - r^2}$ E) $\pi r\sqrt{m^2 - r^2}$

91. Sobre un plano P descansan tres esferas iguales de radio R que hacen contacto una con otra. Un cono circular recto está dispuesto de tal manera que el círculo de su base está en el plano P y las esferas dadas hacen contacto con el cono y se encuentran fuera de él. Calcule el radio de la base del cono si su altura es igual a qR .

A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)R$ B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)R$ C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R$
 D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)R$ E) $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)R$

92. En una esfera de radio R, a que distancia del centro se trazara un plano secante para que las áreas de los casquetes determinados se encuentran en la relación como $k_1 : k_2$ ($k_1 > k_2$).

A) $\frac{R(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$ B) $\frac{R(k_1 - k_2)}{k_1 + 2k_2}$
 C) $\frac{R(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$
 D) $\frac{R(k_2 - 2k_1)}{k_1 + k_2}$ E) $\frac{R(k_1 - k_2)}{2k_1}$

93. Las áreas de dos secciones paralelas de una esfera, dispuestas a un mismo lado respecto a su centro, son iguales a S_1 y S_2 . La distancia entre estas secciones es igual a d unidades. calcule el área de la sección paralela a las secciones dadas y que equiste de la secciones dadas.

A) $\frac{1}{2}(S_1 + S_2 + \frac{\pi d^2}{2})$
 B) $\frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \frac{\pi d^2}{2})$
 C) $\frac{1}{4}(S_1 + S_2 + \frac{\pi d^2}{2})$
 D) $\frac{1}{4}(S_1 + S_2 + \pi d^2)$
 E) $\frac{1}{4}(S_1 + S_2 + \frac{\pi d^2}{2})$

94. Desde un punto de la superficie esférica cuyo radio mide R unidades, se han trazado tres cuerdas congruentes que forman un ángulo cuya medida es α° una con la otra. Calcule la longitud de esta cuerda.

A) $2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
 B) $R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
 C) $3R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
 D) $2R\sqrt{1 - \frac{5}{7}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
 E) $2R\sqrt{1 - \frac{3}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

95. En un octaedro cuyas aristas miden a unidades. Se ubica una esfera tangente a las aristas, calcular el área de uno de los casquetes que se determinan sobre una de las caras del octaedro.

A) $\frac{\pi a^2}{3}(3 - \sqrt{3})$ B) $\frac{\pi a^2}{3}(3 - \sqrt{6})$

C) $\frac{\pi a^2}{6}(3 - \sqrt{6})$

D) $\frac{\pi a^2}{6}(4 - \sqrt{6})$ E) $\frac{\pi a^2}{3}(4 - \sqrt{6})$

96. En un cono equilátero de $\sqrt{3}/3 \pi u^3$ de volumen se inscribe una esfera. Si A es punto de la circunferencia de tangencia y F es la intersección de la altura del cono con la superficie esférica, hallar el volumen del anillo esférico generado por el segmento circular determinado por la cuerda AF, al girar alrededor de la altura del cono.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{5}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

97. Hallar el área que genera un arco de circunferencia AB cuando gira alrededor de un eje que contiene al centro de la circunferencia donde está contenido el arco AB. Si CA=3 y CB=6, si C es el extremo del diámetro más próximo al punto A.

A) 25π B) 21π C) 30π

D) 27π E) 18π

98. En una esfera de radio R, se inscribe un cono equilátero, se traza un plano

plano que contiene al centro de la esfera y es paralelo a la base del cono. Halle el volumen del tronco de cono generado.

A) $\frac{20}{67} \pi R^3$ B) $\frac{19}{72} \pi R^3$ C) $\frac{7}{82} \pi R^3$

D) $\frac{6}{49} \pi R^3$ E) $\frac{17}{73} \pi R^3$

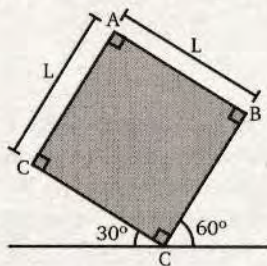
99. AMNC es un trapecio de bases MN y AC ($MN < AC$), si la región gira alrededor de la recta MN, halle el volumen generado. Si $2MN=AC=4u$ y de altura h.

A) $2h^2\left(\pi - \frac{1}{2}\right)$ B) $3h^2(\pi - 2)$

C) $2h^2\left(\pi - \frac{1}{3}\right)$

D) $3h^2\left(\pi - \frac{1}{3}\right)$ E) $2h^2(\pi - 1)$

100. Cuadrilátero ABCD es un cuadrado. Halle el volumen generado por la región cuando gira alrededor del eje x.



A) $V = \frac{\pi L^3}{8}(\sqrt{3} + 1)$

B) $V = \frac{\pi L^3}{6}(\sqrt{3} + 1)$

C) $V = \frac{\pi L^3}{5}(\sqrt{3} + 1)$

D) $V = \frac{\pi L^3}{4}(\sqrt{3} + 1)$

E) $V = \frac{\pi L^3}{2}(\sqrt{3} + 1)$



CLAVES

1	B
2	D
3	D
4	C
5	A
6	A
7	C
8	B
9	D
10	D
11	C
12	A
13	B
14	E
15	A
16	C
17	B
18	B
19	B
20	E
21	A
22	C
23	A
24	B
25	B

26	A
27	C
28	C
29	B
30	E
31	B
32	C
33	D
34	E
35	A
36	E
37	E
38	D
39	D
40	A
41	E
42	C
43	D
44	E
45	B
46	E
47	C
48	B
49	C
50	D

51	C
52	D
53	C
54	D
55	C
56	B
57	C
58	C
59	A
60	A
61	C
62	A
63	D
64	A
65	E
66	A
67	B
68	A
69	A
70	B
71	E
72	A
73	C
74	D
75	E

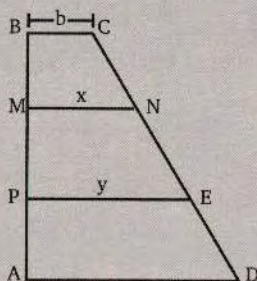
76	B
77	B
78	C
79	C
80	B
81	A
82	C
83	D
84	D
85	C
86	B
87	D
88	C
89	B
90	B
91	A
92	P
93	C
94	A
95	D
96	P
97	C
98	B
99	D
100	P

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNVI

UNI - 2013 - II

PROBLEMA 1:

Se da un trapecio en el cual la base menor mide b . Si la base mayor es 8 veces la base menor (figura), y se divide el trapecio en 3 trapecios semejantes por dos paralelas a las bases, halle el valor de x (la menor paralela).



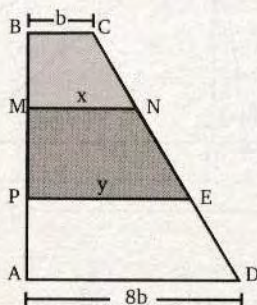
A) $2b$
D) $1,5b$

B) $2,5b$

C) $3b$
E) $3,5b$

Resolución:

Piden: x



Los trapecios son semejantes:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{8b} = k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2b$$

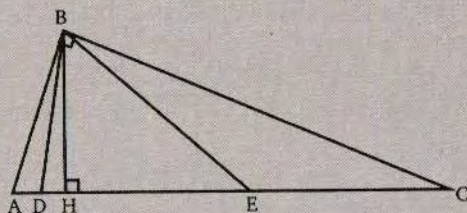
Rpta.: A

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 12

PROBLEMA 2:

En la figura, el triángulo ABC recta en B, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo ABH y BE es la bisectriz del ángulo HBC.

Si $AB = 7u$ y $BC = 24u$. Calcule el valor del segmento DE (en u)



A) 4

B) 5

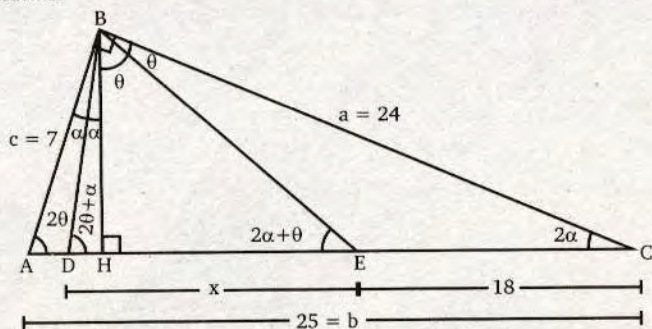
C) 6

D) 8

E) 9

Resolución:

Piden: x



* $\triangle ABE$: isósceles: $AB = AE = 7 \rightarrow EC = 18$

$\triangle BCD$: isósceles: $BC = DC = 24$

$$x + 8 = 24$$

$$\therefore x = 6$$

Rpta.: C

PROBLEMA 3: Se tiene un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio $r = 6\text{cm}$, si M es el punto que divide al arco $\widehat{AB}$ en partes iguales ($M \neq C$), entonces el área de la región triangular AMB en cm^2 es:

A) $8\sqrt{3}$

B) $9\sqrt{3}$

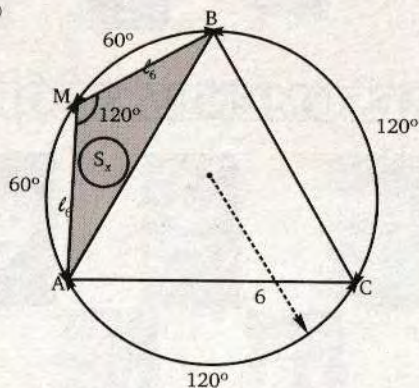
C) $10\sqrt{3}$

D) $11\sqrt{3}$

E) $12\sqrt{3}$

Resolución:

Piden: $S_{(x)}$



$$\ell_6 = R = 6$$

$$\therefore S = \frac{6 \times 6}{2} \sin 120^\circ$$

$$S_x = 9\sqrt{3}$$

Rpta.: B

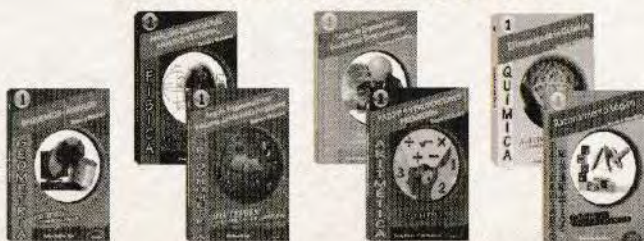
LIBROS



RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS



Aritmética (15 folletos)
Álgebra (15 folletos)
Geometría (14 folletos)
Trigonometría (17 folletos)
Raz. Matemático (18 folletos)
Física (16 folletos)
Química (16 folletos)



- ✓ 140 páginas
- ✓ Marco teórico completo.
- ✓ 100 problemas resueltos
- ✓ 100 problemas propuestos con claves.
- ✓ Básico - Intermedio - Avanzado
- ✓ Exámenes de admisión resueltos.

N°	TEMAS
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación y Congruencia)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza de Triángulos
6	Relaciones Métricas
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350

992 - 796104

 / **fondoeditorialrodo**

editorialrodo@gmail.com